Equações Diferenciais de Ordem n

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma:

$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y =$

$= G(t) \quad (1),$

onde P_0, $P_1, \cdots, P_n$ são funções reais e contínuas em algum intervalo $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Nos pontos onde P_0 não se anula, podemos dividir a equação (1) por $P_0(t)$ em ambos os lados e obter uma outra forma geral das e.d.o.'s lineares de ordem n:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \quad (2)$$

Também podemos ter a seguinte forma:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t). \quad (3)$$

Um Problema de Valor Inicial de uma equação de ordem n tem que ter n condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_0', \cdots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}. \quad (4)$$

Também temos um Teorema de Existência e Unicidade de Equações Lineares de Ordem n.

Teorema 1 (Existência e Unicidade) Sejam $p_1, p_2, \cdots, p_n$ e g funções contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$ contendo o ponto t_0. Então existe uma única solução $y = \varphi(t)$ para o problema (3), satisfazendo as condições iniciais (4), e a solução existe em todo o intervalo I.

Uma equação linear de ordem n é **homogênenea** se a função $g(t)$ na equação (2) (ou a função $G(t)$ na equação (1)) é uma função identicamente nula. Ou seja, uma equação linear homogênea de ordem n é da forma:

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \quad (5)$$

Se $y_1,\ y_2, \cdots, y_n$ são soluções da equação (5), então qualquer combinação linear

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots + c_n \cdot y_n$$

também é solução da equação (5).

Vamos definir o **Wronskiano** de n funções $y_1,\ y_2, \cdots, y_n$ como sendo o seguinte determinante:

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Sejam $y_1,\ y_2, \cdots, y_n$ soluções da equação homogênea (5). Dizemos que $y_1,\ y_2, \cdots, y_n$

formam um **conjunto fundamental de soluções de** (5) se toda solução da equação (5) for combinação linear de $y_1,\, y_2, \cdots, y_n$.

Do mesmo modo que para equações de segunda ordem, temos o seguinte resultado:

Teorema 2 Sejam $p_1,\, p_2, \cdots, p_n$ funções contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$. Sejam $y_1,\, y_2, \cdots, y_n$ soluções da equação homogênea (5) no intervalo I. Então $y_1,\, y_2, \cdots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções de (5) se e somente se $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(t) \neq 0$, para algum $t \in I$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS DE ORDEM n COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considere a e.d.o. linear homogênea de ordem n

com coeficientes constantes:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (6)$$

onde a_0, $a_1, \cdots, a_n$ são constantes reais e

$a_0 \neq 0$.

É natural esperar que $y = e^{rt}$ seja solução da equação (6). De fato, substituindo $y = e^{rt}$ na equação (6), obtemos

$$e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0.$$

A equação

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (7)$$

é chamada de **Equação Característica da Equação Diferencial** (6) e suas raízes r são tais que $y = e^{rt}$ é solução de (6).