Independência Linear

Um conjunto de k vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ é *linearmente dependente (l.d.)* se existe um conjunto de números (reais ou complexos) não todos nulos $c_1, c_2, \cdots, c_k$ tais que

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots c_k\vec{x}_k = \vec{0} \text{ (vetor nulo).}$$

Se por outro lado o único conjunto $c_1, c_2, \cdots, c_k$ para os quais a igualdade acima é satisfeita for $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ então dizemos que os vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ são *linearmente independentes (l.i.)*

Seja x_{ij} a i-ésima componente do vetor $\vec{x}_j$. Seja $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{k}$ a matriz formada por tais componentes. Então os vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$

são l.i. se se somente se $\det X \neq 0$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1 Determine se os vetores

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

são l.i. ou l.d. Se forem l.d., encontre um relação linear entre eles.

$$\det X = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$ Portanto os vetores são l.d.

Agora precisamos encontrar números c_1, c_2 e c_3, alguns deles pelo menos diferente de zero, tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 5 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto $c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0$ e $-3c_2 + 9c_3 = 0$.

Logo $c_2 = 3c_3$ e $c_1 = -2c_3$. Fazendo então $c_3 = 1$ obtemos a relação linear entre os vetores:

$$-2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0.$$

Teoria básica de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem

Considere o seguinte sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Sejam $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ e

$P(t) = \big(p_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{n} =$

$$\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix} = P(t)$$

Então o sistema acima pode ser escrito na notação matricial-vetorial como

$$\vec{x}\,' = P(t)\vec{x} + \vec{g}(t). \tag{1}$$

Vamos supor que P e g são contínuas em algum intervalo (α, β). Vamos ainda considerar inicialmente a equação homogênea

$$\vec{x}\,' = P(t)\vec{x}, \tag{2}$$

isto é, o vetor de funções $\vec{g}(t)$ é o vetor nulo.

Teorema 2 Sejam $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ dois vetores de funções que são soluções do sistema (2). Então a combinação linear $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$ também é solução de (2), para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Sejam $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_n$ vetores soluções do sistema (2). Ou seja

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\vec{x_n} = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Vale que

$$x'_{11} = p_{11}(t)x_{11} + p_{12}(t)x_{21} + \cdots + p_{1n}(t)x_{n1}$$

$$x'_{21} = p_{21}(t)x_{11} + p_{22}(t)x_{21} + \cdots + p_{2n}(t)x_{n1}$$

$$\vdots$$

$$x'_{n1} = p_{n1}(t)x_{11} + p_{n2}(t)x_{21} + \cdots + p_{nn}(t)x_{n1}.$$

e o mesmo vale para $\vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$.

Considere

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

a matriz formada pelos vetores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Sabemos que $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ são l.i. se e somente se $\det X \neq 0$. Vamos denotar $\det X(t) = W[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n](t)$, e chamaremos de *Wronskiano* de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Teorema 3 Se os vetores de funções $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_n$ são soluções linearmente independentes do sistema (2) em cada ponto do intervalo (α, β) então cada solução $\vec{x} = \Phi(t)$ do sistema (2) pode ser expressa como uma combinação linear de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_n$, isto é,

$$\vec{x} = \Phi(t) = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n. \tag{3}$$

(3) é chamada *solução geral o sistema* (2).

Um conjunto de soluções de (2) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_n$ que seja linearmente independente no intervalo (α, β) é chamado de *conjunto fundamental de soluções de* (2).

Teorema 4 Se $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_n$ são soluções do sistema (2) no intervalo (α, β), então ou $W[\vec{x}_1,\, \vec{x}_2,\, \cdots,\, \vec{x}_n](t) = 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$ ou $W[\vec{x}_1,\, \vec{x}_2,\, \cdots,\, \vec{x}_n](t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$.