Alinhamento de 3 pontos, Volumes de Paralelepípedos e Áreas de Paralelogramos*

30/11/2019

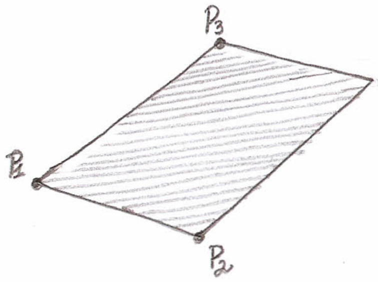
O módulo (valor absoluto) do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

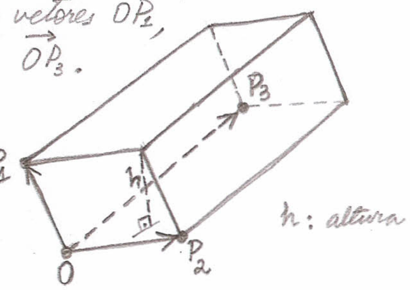
$$\overrightarrow{OP_1},\ \overrightarrow{OP_2},\ \overrightarrow{OP_3},$$

de coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), em um sistema de coordenadas cartesianas xyz, no espaço, sendo O a origem deste sistema de coordenadas cartesianas. V. e.g. o livro do Prof. Reginaldo J. Santos, *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, https://www.dropbox.com/s/aa71ogpk8xski1j/gaalt1.pdf?m, 2013; especificamente, os Teoremas 3.7 e 3.8, nas páginas 193 e 196, deste livro.



Paralelogramo determinado pelos pontos P_1, P_2, P_3.

Paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$.



Quando a altura do paralelepípedo for igual a 1, em relação a uma face (base), qualquer, o módulo do determinante acima é área desta face (da base).† (Toda face de um paralelepípedo é um paralelogramo.)

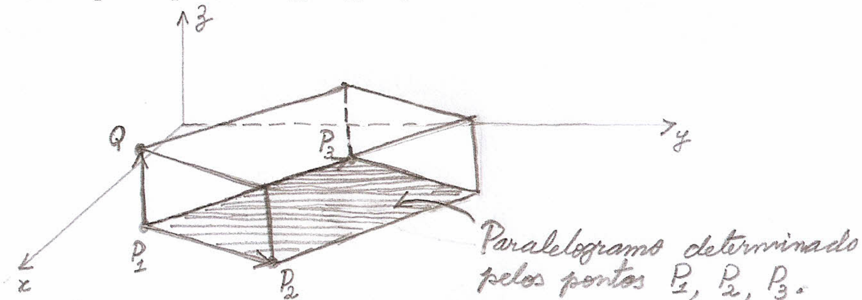
*Texto motivado pela Apresentação do Renan.

†Volume = (área da base)×(altura).

Dados três pontos $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, não alinhados (não colineares) em um plano cartesiano xy, podemos considerá-los no sistema de coordenadas cartesianas no espaço xyz com a identificação $(x_i, y_i) = (x_i, y_i, 0)$. O parelelepípedo determinado pelos vetores

$$\overrightarrow{P_1Q}, \quad \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \overrightarrow{P_1P_3},$$

onde $Q = (x_1, y_1, 1)$, tem altura 1, tomando como base o paralelogramo determinado pelos pontos P_1, P_2, P_3.‡



Conclua§ que uma condição para que três pontos $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ estejam alinhados é que o determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

seja igual a zero.

Para uma excelente demonstração desta condição (Teorema) sem usar o Ensino Superior, só usando argumentos algébricos, veja o livro do G. Iezzi et al., *Fundamentos da Matemática Elementar*.

‡No livro do Prof. Reginaldo, supracitado, no Exercício 3.2.37, p. 207, é pedido para mostrar que a área do triângulo determinada pelos pontos P_1, P_2, P_3 é metade do determinante acima e é sugerida a construção deste paralelogramo de altura 1.

§Os vetores $\overrightarrow{P_1Q}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ têm coordenadas $(0, 0, 1)$, $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$. Note a igualdade de determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

(desenvolva-os pela 3a. coluna). Fazendo operações elementares nas linhas deste último, concluímos facilmente que é igual ao determinante acima.