Nome: Gabarito______ R.A.: ____
MA141 - Cursão **4º Teste** (12/05/2009)

(Evite usar folhas extras.)

1. Considere a família de curvas gerada pela reta $y = 0$ e pela elipse $2x^2 + y^2 = 1$:

$$\alpha\, y + \beta\,(2x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Ou, equivalentemente, $2x^2 + y^2 = 1$ e

$$y + t\,(2x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

$t \in \mathbb{R}$. Determine os valores de t tais que:

(i) a curva associada é o conjunto vazio;

Solução: A curva tem equação, para $t \neq 0$,

$$2x^2 + \left(y + \frac{1}{2t}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4t^2}.$$

Trata-se de uma elipse, com centro no ponto $(0, -1/2t)$. Não há valores de t para os quais a curva é o conjunto vazio.

(ii) a curva associada é uma reta e, neste caso, ache a equação correspondente;

Solução: Para $t = 0$, e a curva é $y = 0$.

(iii) a curva associada é uma circunferência e, neste caso, ache seu centro e raio;

Solução: A curva nunca será uma circunferência.

(iv) a curva associada é uma elipse e, neste caso, ache seu centro e seus semi-eixos maior e menor.

Solução: Para qualquer $t \neq 0$. O centro será $(0, -1/2t)$, e os semi-eixos serão $2\sqrt{1 + \frac{1}{4t^2}}$ e $\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4t^2}}$.

2. Uma escada tem uma de suas extremidades apoiada no chão (horizontal) e a outra apoiada contra uma parede (vertical). Um balde encontra-se pendurado em um de seus degraus. Lentamente, a escada começa a escorregar sob a ação da gravidade, mas ainda apoiada na parede. Determine que tipo de curva é traçado pelo balde.

Solução: Seja $(x, y) \in R^2$. Posicionemos a parede em $y \leq 0$ e o chão em $x \leq 0$. Seja ℓ_1 o comprimento da escada apoiada na parede, que faz um ângulo θ com o chão. Seja ℓ_2 a distância do balde ao longo da escada, medida a partir do ponto de contato com o chão. A posição do balde pode ser parametrizada como $((\ell_1 - \ell_2)\cos\theta, \ell_1 \sin\theta)$. Quando o balde desliza, o ângulo θ diminui até zero (escada na horizontal). A curva assim parametrizada é um arco de elipse.

Nome: ______ R.A.: ____
MA141 - Cursão **5º Teste** (26/05/2009)

(Evite usar folhas extras.)

1. a) Determinar a equação e identificar a trajetória de um ponto que se move de maneira que sua distância ao ponto $F : (6, 0)$ é sempre igual a duas vezes sua distância à reta $2x - 3 = 0$.

Seja $P \in R^2$ um ponto de coordenadas (x, y). Tem-se $\operatorname{dist}(P, F) = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$ e $\operatorname{dist}(P, s) = x + \frac{3}{2}$, sendo s a reta do enunciado. A curva é definida por $\operatorname{dist}(P, F) = 2\operatorname{dist}(P, s)$, de onde se obtem

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 8x - \frac{y^2}{3} = 9.$$

Trata-se de uma hipérbole.

b) Determinar a equação e identificar a trajetória de um ponto que se move de maneira que sua distância ao eixo y é igual a duas vezes sua distância ao ponto $F:(3,2)$.
De maneira análoga, tem-se

$$y^2 = 4(x-3)^2 + 4(y-2)^2 \Rightarrow 4(x-3)^2 + 3y^2 - 16y + 16 = 0 \Rightarrow 4(x-3)^2 + 3\left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{176}{3}.$$

Trata-se de uma elipse.

2. Uma escada está apoiada contra uma parede vertical com um balde pendurado em um de seus degraus. Lentamente, a escada começa a escorregar sob a ação da gravidade, mas ainda apoiada na parede. Determine que tipo de curva é traçado pelo balde.
Idêntica ao teste 4.