Nome: Gabarito RA: -1

Teste 3 - MA 141 - Cursão, turma $\underline{\chi}$, 14 de abril de 2009.

É proibido usar calculadora. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas. Boa prova.

1. (4 Pontos) Considere o triângulo $\widehat{ABC}$. Sejam α, β e γ, respectivamente, os ângulos dos vértices A, B e C. Demonstre a Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\overline{AB}}.$$

(Dica: Considere o triângulo em R^3 e use o produto vetorial.)

Sejam $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{BA}$ *e* $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{BC}$. *Temos que* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{W} - \overrightarrow{V}$. *O ângulo* β *do vértice* B *é tal que*

$$\sin\beta = \frac{|\overrightarrow{W}\times\overrightarrow{V}|}{|\overrightarrow{W}||\overrightarrow{V}|}.$$

Para o vértice A, *tem-se*

$$\sin\alpha = \frac{|(\overrightarrow{W}-\overrightarrow{V})\times\overrightarrow{V}|}{|\overrightarrow{W}-\overrightarrow{V}||\overrightarrow{V}|} = \frac{|\overrightarrow{W}\times\overrightarrow{V}|}{|\overrightarrow{W}-\overrightarrow{V}||\overrightarrow{V}|}.$$

Note que

$$\frac{\sin\alpha}{|\overrightarrow{W}|} = \frac{\sin\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin\beta}{|\overrightarrow{W}-\overrightarrow{V}|} = \frac{\sin\beta}{\overline{AC}}.$$

Para o vértice C, *a análise é análoga:*

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin\beta}{\overline{AC}} = \frac{\sin\gamma}{\overline{BA}}$$

2. (6 Pontos) Mostre que as três alturas (segmentos de reta que unem um vértice à reta que contêm seu lado oposto, sendo perpendicular a esta) de um triângulo se intesectam em um ponto (chamado ortocentro).

Pode-se admitir, sem perda de generalidade, que os vértices A, B *e* C *têm coordenadas* $(0,0)$, $(a,0)$ *e* (b,c), *respectivamente. Sejam* r, s *e* t, *as retas que contêm as alturas relativas, respectivamente, aos vértices* A, B *e* C. *A reta* t *tem equação (ela é vertical nesse sistema de coordenadas):*

$$t: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Já a reta r *passa pela origem (vértice* A*) e é perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{BC} = (b-a)\hat{\imath} + c\hat{\jmath}$:

$$r: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix}$$

Finalmente, a reta s *passa pelo vértice* B *e é perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{AC} = b\hat{\imath} + c\hat{\jmath}$:

$$s: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$$

A intersecção $t \cap r$ corresponde ao ponto

$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & 0 \\ a-b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tem como solução $\tau = b/c$, que por sua vez corresponde ao ponto $\big(b, \frac{b}{c}(a-b)\big)$. Este ponto, porém, pertence também a reta s, basta tomar $\sigma = -(a-b)/c$.