Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Teste 1

17 de março de 2010

1. Seja $S$ uma superfície suave e orientada em $\mathbb{R}^3$, com fronteira dada pela curva também suave $C = \partial S$, sendo a orientação em $C$ aquela induzida por $S$.

   (i) Mostre que
   $$2\iint_S d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}.$$

   (ii) Qual a interpretação geométrica da integral do lado esquerdo? O que acontece quando S é fechada? E quando $S$ é plana?

2. Considere as coordenadas curvilíneas $u$, $v$ e $z$ definidas (localmente) em $\mathbb{R}^3$ por
   $$xy = u, \qquad x^2 - y^2 = v, \qquad z = z.$$

   (i) Mostre que as relações acima definem um sistema curvilíneo ortogonal.

   (ii) Calcule os *versores* $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{z}$ correspondentes. Seu sistema é orientado positivamente?

   (iii) Esboce este sistema no plano $xy$ (tanto as curvas definidas pelas coordenadas no plano $xy$ como os versores acima).

1-(i) Dado um vetor $\vec{a}$ (constante) arbitrário:

$$\vec{a}\cdot\oint_C \vec{r}\times d\vec{r} = \oint_C \vec{a}\cdot\vec{r}\times d\vec{r} = \oint_C (\vec{a}\times\vec{r})\cdot d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})\cdot d\vec{S} =$$

$$\overset{(*)}{=} 2\iint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = 2\vec{a}\cdot\iint d\vec{S}$$

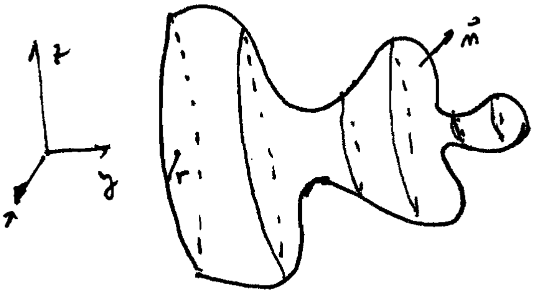
Logo: $\displaystyle\oint_C \vec{r}\times d\vec{r} = 2\iint_S d\vec{S}$

$$(*)\quad \vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2x_3 - a_3x_2 & a_3x_1 - a_1x_3 & a_1x_2 - a_2x_1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} = 2\vec{a}$$

(ii) • A interpretação geométrica de $\vec{A} = \iint_S d\vec{\sigma}$ é que este vetor dá "projeções líquidas" das áreas nos planos coordenados.

Ex:

$\vec{A} = (0, 0, \pi r^2)$



$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi r^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Se a superfície S é fechada, $\displaystyle\iint_S d\vec{\sigma} = 0$ $\quad\left(\vec{a}\cdot\iint_S d\vec{\sigma} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V (\nabla\cdot\vec{a})\,dV = 0 \quad \forall\vec{a}\ \text{cte}\right)$

• Se a superfície S é plana, digamos com vetor normal $\vec{n} = \vec{\text{cte}}$, temos $\displaystyle\iint_S d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{n}\,d\sigma = \vec{n}\iint_S d\sigma = \text{Área}(S)\,\vec{n}$.

② (i) $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -2y & -x \\ -2x & y \end{pmatrix}$

$$\to \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -\frac{1}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0$$

(outra maneira: $\nabla u = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como $\nabla u, \nabla v$ e $\nabla z$ são ortogonais, temos $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \propto \nabla u$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \propto \nabla v$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \propto \nabla z$).

(ii) Segue de (i) que

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com tais escolhas de sinal, $\hat{u} \times \hat{v} \cdot \hat{z} = +1 \to \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{z}\}$ orientado positivamente

(iii)