x_i	$\hat{x}_i$	Erro
198	197,18	– 0,41%
259	265,19	2,39%
344	333,20	– 3,14%
395	401,21	1,57%
470	469,22	– 0,17%

■

Exemplo 4.24: Em algumas circunstâncias temos interesse em obrigar que a reta de regressão passe pela origem. Nesse caso, tem-se que o termo constante da reta é nulo ($a = 0$) e o cálculo pode ser realizado utilizando-se diretamente a derivada.

Sejam (x_i, y_i) os valores observados e $y = bx$ a reta de regressão buscada; os valores estimados da variável dependente y, com relação aos x_i, serão os $\hat{y}_i = bx_i$. Devemos, então, minimizar a expressão

$$S = S(b) = \Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma (y_i - bx_i)^2 = \Sigma y_i^2 - 2b \Sigma x_i y_i + b^2 \Sigma x_i^2$$

Derivando e igualando a zero, obtém-se

$$S'(b) = -2\Sigma x_i y_i + 2b\Sigma x_i^2 = 0$$

$$b = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}$$

Esse tipo de reta de regressão (passando pela origem) tem interesse, por exemplo, para se obter uma *reta de calibração* representando a relação entre a leitura y de um densitômetro ou espectrofotômetro em função da concentração x de uma substância. Com efeito espera-se que para uma concentração $x = 0$, a leitura corresponda a $y = 0$. ■

EXERCÍCIOS

1. A função $f(x) = 3x^2 - 5$ satisfaz o teorema da média no intervalo $[-3, 1]$? Se for esse o caso, determine $x = x_0$ tal que $f(-3) - f(1) = f'(x_0)[(-3) - 1]$.

2. Sobre a curva $y = x^3$, determine o ponto no qual a tangente é paralela à reta secante que une os pontos $P_1(-1, -1)$ a $P_2(2, 8)$.

3. Um caso particular do teorema da média, mais conhecido como *teorema de Rolle*, ocorre quando $f(a) = f(b) = 0$. Nesta situação, quanto vale $f'(x_0)$, de acordo com o Teorema 4.1? Exemplifique o teorema de Rolle por meio de um esboço gráfico.

4. As funções abaixo:

   a. $f(x) = 1 - x^{2/3}$ em $(-1, 1)$;
   b. $g(x) = 1 - x$ em $(-1, 1)$;
   c. $h(x) = 1 - x^2$ em $[-1, 1]$;

   satisfazem o teorema de Rolle? Justifique sua resposta.

5. Considere a função $f(x) = x^2 + 3x - 10$. Tem-se que $f(-5) = f(2) = 0$. Segundo o teorema de Rolle, existe $x_0 \in (-5, 2)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nesta situação, quanto vale x_0? Justifique.

6. É possível demonstrar o teorema da média (Teorema 4.1) a partir do teorema de Rolle. Supondo que $f(x)$ satisfaz às condições do teorema de Rolle em $[a, b]$, considere a função auxiliar definida por

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

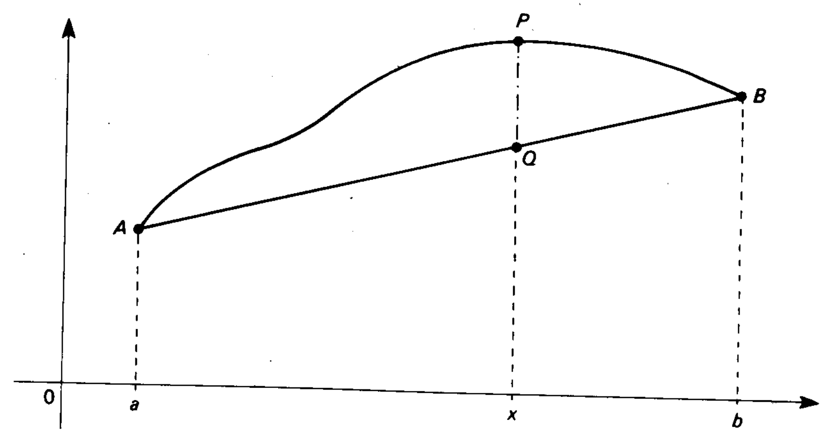
   para $a \leq x \leq b$. Mostre que:

   a. $F(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b);
   b. $F(a) = F(b) = 0$;
   c. conclua, pelo teorema de Rolle, que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$;
   d. a partir de (*c*), obtenha que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

*7. Mostre que:

   a. a expressão $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para cada x em $[a, b]$ representa a distância entre os pontos $P(x, f(x))$ do gráfico de $y = f(x)$ e os pontos Q da reta secante que une os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, conforme a figura abaixo;



   b. justifique por que $F(a) = F(b) = 0$;
   c. o que representa o ponto $x = x_0$ onde $F'(x_0) = 0$, em relação à função $F(x)$?

8. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ tais que $f(x) - g(x) = k$ (k uma constante).

a. Se ambas as funções são deriváveis, prove que $f'(x) = g'(x)$. Reciprocamente, se $f'(x) = g'(x)$ em (a, b), então $f(x) - g(x) = k$, isto é, $f(x) = g(x) + k$. (*Sugestão*: aplique o teorema da média à função $h(x) = f(x) - g(x)$ em dois pontos x_1 e x_2 quaisquer do intervalo (a, b).)

b. Como f e g são contínuas em (a, b) (por quê?), é verdade que $f(a) = g(b) + k$ e que $f(b) = g(b) + k$? Justifique.

***9.** Aplique o exercício anterior para mostrar que

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{\cos(2x)}{2} = k$$

onde k é uma constante e x é um número real qualquer. Quanto vale a constante k?

10. Use o teorema da média para mostrar que a diferença entre as raízes quadradas de dois inteiros consecutivos maiores do que K^2 é menor do que $1/2K$.

11. Mostre que $|\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| < |x_1 - x_2|$.

12. Determine, para cada função abaixo, os intervalos onde são monótonas crescentes ou decrescentes:

a. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$;
b. $g(x) = x^3 + 2x - 5$;
c. $h(x) = \cos x - x$.

13. Determine os pontos de máximos e de mínimos das seguintes funções:

a. $f(x) = 0{,}75x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$;
b. $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2$;
c. $f(x) = [x^2 - 3x + 2]/[x^2 + 2x + 1]$.

***14.** O peso fetal varia com o tempo de gestação. Se denotamo-lo por P e o tempo por t, propõem McDawell e Allen (*Proc. Soc. Exp. Bras. Med.*, *24*:672, 1927) a seguinte equação

$$P(t) = a(t - b)^c$$

onde alguns valores para as constantes **a**, **b** e **c** estão expressos na tabela abaixo. A constante **b** representa a fase *lag*, isto é, o período durante o qual a placenta se fixa (*Nature*, 19 de agosto de 1967, vol. 215):

Espécie	$a \cdot 10^6$	b	c
Rato	1,0	8	3,0
Porco	0,9	19	2,9
Vaca	15,0	58	2,7
Macaco *rhesus*	5,0	35	2,4
Homem	7,0	41	2,7

a. esboce a função P.
b. se denotarmos o tempo do nascimento por t_n e $P_n = P(t_n)$, mostre que, para o home

$$\frac{dP}{dt}(t_n) = \frac{2{,}7\,P_n}{t_n - 41}$$

15. Tomaram-se n medições de uma certa grandeza x desconhecida, as quais foram denotadas por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Tem-se que $E_i = |x - x_i|$ representa o erro cometido na i-ésima medição. Consideremos agora a função

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$

a qual denota a soma dos quadrados dos n erros. Mostre que essa função atinge seu mínimo no ponto

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

isto é, $f'(\bar{x}) = 0$ e $f''(\bar{x}) = 2n > 0$.

16. O maior constituinte do corpo humano é a água, que é muito eficiente na dissolução de sais devido ao fato de suas moléculas combinarem-se com íons, dando origem a íons hidratados. A presença de íons de hidrogênio em soluções aquosas (H^+ e OH^-) é tal que a uma temperatura constante de 25 °C, tem-se

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14}$$

Para que concentração de $[H^+]$ a soma $[H^+] + [OH^-]$ é mínima?

17. O peso específico da água a uma temperatura de t °C é dado por

$$P(t) = 1 + at + bt^2 + ct^3, \qquad 0 \leqq t \leqq 100\ °C$$

sendo as constantes $a = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$, $b = -6{,}53 \cdot 10^{-6}$ e $c = 1{,}4 \cdot 10^{-8}$. Qual é a temperatura na qual a água apresentará o maior peso específico?

18. Hoorweg estudou a estimulação elétrica de nervos através de descargas de um condensador. Descobriu que o potencial P necessário para provocar uma resposta mínima (contração muscular) relacionava-se com a capacidade C do condensador, segundo a fórmula

$$P = aR + \frac{b}{C}$$

onde R é a resistência (aqui suposta constante), enquanto que **a** e **b** são constantes positivas. Se a capacidade C for medida em microfarads e o potencial P do condensador em volts, sabe-se, da Física elementar, que a energia E é expressa por $E = 5CP^2$ ergs. Substituindo o valor de P nesta última equação, vamos ter

$$E = 5C\left(aR + \frac{b}{C}\right)^2 = 5a^2R^2C + 10abR + \frac{5b^2}{C}$$

Considerando E como uma função apenas de C, mostre que E será mínima quando $C = b/aR$. Qual o valor de E neste ponto? Esboce o gráfico de E para $C \geqq 0$.

19. Cinqüenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos t anos a população x desses animais é estimada por

$$x(t) = 50\,\frac{t^2 + 6t + 30}{t^2 + 30}$$

Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

Em Fisiologia tem grande importância a avaliação do coeficiente de difusão do oxigênio através de tecidos com respiração ativa. Para descrever tal fenômeno, Warburg (*Biochim. Z.*, *142*:317, 1923) propôs a equação

$$y = C - \frac{a}{2D}(Hx - x^2)$$

a qual relaciona a tensão de oxigênio com a distância x à superfície da fatia em qualquer ponto. Tem-se ainda que:

y = tensão de O_2 (em atmosferas) em um ponto situado a x cm a partir da superfície do tecido;
C = tensão externa de O_2 (em atmosferas);
a = taxa respiratória do tecido (em ml de O_2 consumidos/min/ml de tecido);
H = a espessura da fatia de tecido (em cm);
D = o coeficiente de difusão de O_2 (em unidades de Krogh).

Mantendo-se constantes C, a, H e D, pede-se:

a. Estabelecer o domínio desta função.
b. Neste domínio, estimar os valores máximo e mínimo e para que valores de x eles ocorrem.
c. No(s) valor(es) de máximo(s), tem-se que $y'(x) = 0$?
d. Tem-se $y(0) = y(H) = C$; interprete este fato fisicamente.
e. Esboce o gráfico de $y(a)$.
f. Por que a equação $\tilde{y} = C + a(Hx - x^2)/(2D)$ não serve para representar a concentração de O_2 em um ponto no interior de uma fatia de tecido com respiração ativa?
g. Faz sentido $y(H/2) < 0$. Justifique.

21. Ward-Smith (Analysis of the aerodynamic performance of birds during bounding flight. *Math. Biosc.*, *68*:140, 1984) sugere que a potência P, em watts, necessária para o vôo horizontal de um pássaro, depende de sua velocidade v, e é dada por

$$P(v) = K_1 v^3 + \frac{K_2}{v}$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas e dependem, entre outros fatores, da densidade do ar, da área da asa, do peso do pássaro etc. Para que velocidade v a potência é mínima?

22. O que é ponto de inflexão? Qual a sua importância? Se a derivada segunda de uma função se anula em um ponto, esse ponto é um ponto de inflexão? Por quê? Reciprocamente, pode ocorrer um ponto de inflexão sem que a derivada segunda se anule? Explique.

23. Nos Exemplos 4.9 e 4.10, qual a importância dos pontos $C/2$ e t^*? Qual a razão disso?

****24.** Considere a função definida por:

a.
$$f(x) = \begin{cases} (-x^4), & \text{se } x \leqq 0 \\ 4x^3, & \text{se } x \geqq 0 \end{cases}$$

Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão.

b.
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } (1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $g'(0) = 0$, mas que em $x = 0$ não ocorrem máximo, mínimo ou ponto de inflexão.

25. Determine os intervalos nos quais a função é convexa e côncava, bem como seus pontos de inflexão:

a. $f(x) = x^3$;
b. $f(x) = x^4$;
c. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$;
d. $f(x) = x^5 + 10x^2 + 5x - 2$.

26. Uma certa infecção dissemina-se em uma população de suscetíveis, inicialmente igual a N indivíduos. Seja $y(t)$ o número de indivíduos infectados. Vamos supor ainda que a população total seja composta apenas por estas duas classes. Sabe-se ainda que a doença se dissemina por contato direto entre as pessoas e quanto maior for o número de infectados e de suscetíveis, mais rapidamente a doença se espalhará. É razoável então supor que a taxa de variação da população doente seja proporcional ao produto $y(N - y)$, ou seja, existe uma constante positiva k tal que $y'(t) = ky(t)[N - y(t)]$.

a. Que acontece neste modelo quando o número de infectados no instante inicial for $y(0) = 0$? Haverá infecção? (Veja o Exemplo 4.10.)
b. Se $y(0) > 0$, determine o valor de $y(t^*)$, onde t^* é o único ponto de inflexão da curva. O que representa o ponto de inflexão t^* em relação à disseminação da doença?
c. Segundo este modelo, toda a população suscetível contrairá a doença transcorrido um certo intervalo de tempo? Justifique.

27. No Exemplo 4.18 deste capítulo vimos que a reta $y = 100$ é assintota à curva $y = y(x)$ e, por essa razão, estabeleceu-se que a titulação do complemento C seja feita com base na parte central da curva, definindo-se a unidade de complemento CH_{50} como sendo a quantidade de C que produz 50% de hemólise. Mostre que $k = CH_{50}$. Expresse o ponto de inflexão em função de CH_{50}.

28. Supõe-se que a saturação percentual de um fluido por um gás sob pressão seja dada pela função

$$f(x) = \frac{100Kx^c}{1 + Kx^c}$$

onde $f(x)$ representa a saturação percentual, x a pressão parcial em torr do gás que está sendo dissolvido, enquanto que $c > 1$ e $K > 0$ são constantes. (Já estudamos um caso particular desta função no Capítulo 1, Exemplo 18, o qual abordava a saturação da molécula de hemoglobina dissolvida no plasma pelo oxigênio. Naquela situação, $K = 0{,}00013$ e $c = 2{,}7$.)

a. Mostre que $f(x)$ é sempre crescente.
b. Determine as regiões onde a função é convexa e côncava.

***29.** Esboce os gráficos das seguintes funções:

a. $f(x) = 1/(x^2 - 1)$;
b. $f(x) = x/(x^2 - 1)$;
c. $f(x) = x^2/(x^2 - 1)$;
d. $f(x) = 2x^3/(x^2 - 1)$.

30. O fisiologista francês Poiseuille mostrou que o volume de um líquido com viscosidade η fluindo através de um tubo circular rígido de raio r e comprimento ℓ é dado por

$$v = \frac{\pi r^4 (P_1 - P_2)}{8\eta \ell}$$

onde $P_1 - P_2 = \Delta P$ é a diferença das pressões medidas nas duas extremidades do tubo. A resistência R é dada pela diferença de pressão dividida pelo volume.

a. Mostre que $R = \dfrac{8\eta \ell}{\pi r^4}$.

b. Considere R como função de ℓ; esboce seu gráfico.

c. Considere agora R como função de r; esboce seu gráfico. Que acontece com R quando reduzimos r pela metade?

d. Na sua opinião R é mais sensível a pequenas variações de r ou de ℓ? Explique.

31. *Regeneração do tecido hepático.* Segundo Spencer, R.P. e Coulombe, M.J., em Quantitation of hepatic growth and regeneration, *Growth*, *30*:277-284, 1976, a regeneração do tecido hepático segue a seguinte equação

$$P(t) = \frac{A\,(t+a)^n}{b + (t+a)^n}$$

onde P representa o peso, a, A e b são constantes positivas; e n um número inteiro maior que um.

a. Em que instante a regeneração se processa mais aceleradamente?

b. O que representa a constante A?

c. Qual o sentido da constante a?

d. Faça um esboço do gráfico de $P = P(t)$.

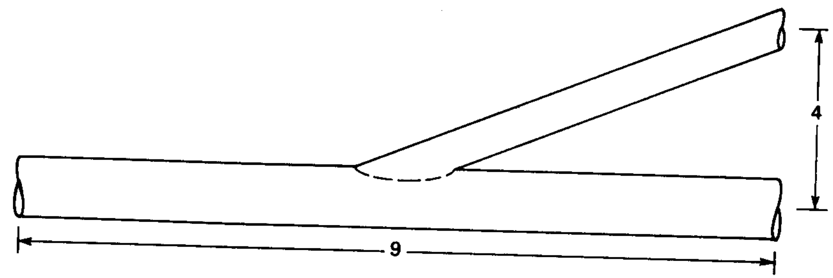
****32.** Muitas vezes a função $C(t) = k[e^{-at} - e^{-bt}]$ é usada para representar a concentração de uma droga no sangue, quando esta não foi administrada na veia, só se difundindo na corrente sangüínea lentamente. São constantes a, b e k, sendo $a < b$. Esboce o gráfico desta função, identificando seu ponto de máximo, pontos de inflexão, possíveis assíntotas etc.

(*Sugestão*: veremos no próximo capítulo que a função exponencial $y = e^x$ é tal que $[e^x]' = e^x$, onde $e \cong 2{,}718$. A menos de constantes multiplicativas, esta exponencial é a única função a ser igual à sua própria derivada! Naturalmente, trata-se de uma função injetiva.)

33. Considere a vazão $V = V(r)$ estudada no Exemplo 4.13, que representa o volume de ar fluindo pela traquéia. Em um dado ponto da traquéia cujo raio é r, a área da secção transversal será πr^2; logo, a velocidade f em cm/s será $f = V/A$, onde A é a área da secção transversal. Determine o raio r para o qual a velocidade do ar é máxima. Esboce o gráfico da velocidade f em função do raio r.

34. Com referência ao Exemplo 4.17, uma vez conhecido o ângulo de implante do enxerto que minimiza o esforço do coração, determinar a distância entre os pontos A e C da Figura 4.26 em função de α_0, d_0, r_1 e r_2.

35. Um cirurgião deseja implantar um vaso sangüíneo em uma artéria cujo diâmetro é igual a 8 mm, sendo o diâmetro do vaso igual a 5,6 mm. Sabendo-se ainda que o trecho da artéria de onde deverá partir o implante mede 9 cm e que o implante deverá atingir um sítio localizado a 4 cm acima de uma das extremidades do segmento arterial referido (veja o esquema abaixo), pede-se determinar o ângulo que ofereça a menor resistência. Em que ponto da artéria AB será realizado o implante? Justifique. Qual será o comprimento do vaso implantado?



36. No Exemplo 4.17 (enxerto de um vaso) determinou-se o ponto ótimo para o implante sob o ponto de vista de minimização da resistência ao fluxo, isto é, o esforço do coração. Expressou-se, naquela ocasião, a resistência total R como função do ângulo α. Pede-se ao leitor reler o exemplo e exprimir R como função de x. Qual é o valor ótimo de x?

37. No Exemplo 4.16 (enxerto de um vaso) foi determinado o ponto ótimo de implante visando minimizar a queda da pressão arterial. Nesse exemplo, a queda de pressão Q foi expressa como função de x. Pede-se ao leitor que agora exprima Q como função do ângulo α. Conhecido α determine x. Como se compara $x = x_1$, onde a queda da pressão deve ser mínima, com $x = x_2$, onde o esforço cardíaco deve ser o menor possível, mantendo-se os mesmos dados do problema?

38. Em Farmacologia estuda-se a habilidade com que muitas células respondem de maneira altamente seletiva a diminutas concentrações de um agente químico. Supõe-se que tais células sejam dotadas de receptores específicos em relação às moléculas do agente químico, chegando a responder a concentrações tão baixas como 10^{-11} moles. Sabe-se que existe uma grande especificidade biológica, traduzida em uma marcante diferença de potência do agente químico para cada tipo de tecido ou órgão (por exemplo, adrenalina tem um grande efeito no músculo cardíaco, mas quase nenhum efeito nos músculos estriados).

Suponhamos aqui que cada receptor se ligue a uma única molécula da droga. A *equação de Langmuir* estabelece que a fração do total de sítios ocupados pela droga é dada por

$$y(x) = \frac{100x}{x + K}$$

onde x representa a concentração da droga e K é uma constante positiva (constante de dissociação de equilíbrio).

a. Esboce o gráfico de y.

b. Para que concentração a resposta dos receptores é mais sensível?

39. Muitas vezes os dados observados não se ajustam bem à equação $y(x) = 100x/(x + K)$ (equação de Langmuir); é mais adequada a equação

$$y(x) = \frac{100x^{\alpha}}{x^{\alpha} + K}$$

com $\alpha > 1$ e $K > 0$, constantes. Esboce o gráfico desta última equação e descreva os aspectos em que ela difere da equação de Langmuir.

****40.** No Exemplo 4.14 (tempo de colisão de um objeto com um indivíduo), consideremos o sistema de coordenadas no qual o objeto que se move ocupa, no instante $t = 0$, o ponto $(-k, 0)$, isto é, k unidades à esquerda da origem. Suponhamos, ainda, que o objeto se desloca com velocidade constante em direção ao indivíduo e que o tempo de colisão será igual a T. Mostre que

$$\frac{\bar{y}(t)}{\bar{y}'(t)} = t - T$$

Segundo esta equação, quando o objeto já se encontra bem perto do indivíduo, qual a maior grandeza, $\bar{y}(t)$ ou $\bar{y}'(t)$? Justifique.

***41.** *Curvas de sobrevivência* são largamente empregadas em Biologia, e em geral são de dois tipos: exponencial ou sigmóide. Considere a curva de sobrevivência dada por

$$S(D) = 1 - [1 - be^{-kD}]^n$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots, b$ e k são constantes positivas, e $0 < b < 1$. É bom observar que todas as constantes que aparecem nesse tipo de curvas têm interpretação biológica. Por exemplo, D poderia ser a dose de uma determinada droga ou qualquer outro fator de tensão aplicado a uma colônia de microrganismos. Pede-se traçar o gráfico de S para $D \geqq 0$, identificando seus pontos de máximo, mínimo e inflexão (se houver).

42. As células sangüíneas, enquanto vivas, estão constantemente produzindo e absorvendo, no seu interior, substâncias químicas que ou se acumulam ou são absorvidas pelo organismo. A taxa à qual este processo de produção ou absorção ocorre depende, entre outros fatores, do quanto essas células sangüíneas vivem. Ao controlar as taxas de tais processos, o médico pode obter com mais antecedência informações de como seu paciente está reagindo ao tratamento por ele prescrito. Por exemplo, a taxa de produção de *hemoglobina glicosada* (HbA_{1c}) nas hemácias está intimamente relacionada com a quantidade de glicose absorvida pela corrente sangüínea nos últimos 120 dias (vida média de uma hemácia). Quando se trata de um diabético, a taxa de produção de HbA_{1c} é mais elevada do que a de um não-diabético. Ora, o tratamento através da administração de insulina visa baixar o nível de glicose de modo a nivelá-lo ao das pessoas normais. Controlando-se o nível de HbA_{1c} durante as semanas seguintes ao início da terapia, o médico pode estimar a taxa de produção de HbA_{1c}, obtendo, desse modo, uma indicação antecipada da possível eficácia do tratamento.

Denotemos por T o período de vida de uma hemácia, por $A(t)$ a quantidade de HbA_{1c} e por $\lambda(t)$ a taxa de produção de HbA_{1c} na corrente sangüínea do indivíduo em cada instante t. Em $t = 0$, vamos supor que o indivíduo seja submetido a alguma forma de tratamento, o que leva, imediatamente, a uma mudança na taxa de produção de HbA_{1c}. Por exemplo, a administração de insulina faz com que $\lambda(t)$ decresça imediatamente. Vamos supor que

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{se} \quad t < 0 \\ \lambda_2, & \text{se} \quad t \geqq 0 \end{cases}$$

É óbvio que $\lambda_2 < \lambda_1$; o caso $\lambda_1 < \lambda_2$ poderia corresponder a um estado diabético artificialmente provocado. Supondo λ como acima, podemos ter

$$A(t) = \begin{cases} N\lambda_1\, T/2, & \text{se} \quad t < 0 \\ N\lambda_1\, T/2 + N(\lambda_2 - \lambda_1)t - N(\lambda_2 - \lambda_1)t^2/(2T), & \text{se} \quad 0 \leqq t \leqq T \\ N\lambda_2\, T/2, & \text{se} \quad t > T \end{cases}$$

onde N é a quantidade de todas as hemácias em qualquer instante.

a. Mostre que $A(t)$ é contínua para todo t.
b. Em que ponto(s) $A(t)$ não é derivável?
c. Identifique os pontos de máximo e mínimo (locais e absolutos), utilizando o teste da primeira derivada.
d. Esboce o gráfico de $A(t)$ para os casos $\lambda_1 < \lambda_2$ e $\lambda_2 < \lambda_1$. Explique seu possível significado do ponto de vista fisiológico.

43. Esboce o gráfico de $f(x) = 2x + 1 + 1/x$, $x \neq 0$, identificando seus pontos extremos e assíntotas.

44. Mostre que a reta $y = ax$ é assíntota à curva dada por $y = ax + 1/x$.

45. Considere a curva dada por $y(x) = 2^{-x} \operatorname{sen} x - x$, a qual possui uma reta assíntota $y = mx + b$. Mostre que

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$$

Uma vez conhecido o valor de m, mostre que b pode ser estimado através de

$$b = \lim_{x \to \infty} [y(x) - mx]$$

46. A tabela abaixo contém a população dos Estados Unidos da América entre os anos de 1790 e 1910, avaliada a cada dez anos.

Ano	População
1790	3.929.000
1800	5.308.000
1810	7.240.000
1820	9.638.000
1830	12.866.000
1840	17.069.000
1850	23.192.000
1860	31.443.000
1870	38.558.000
1880	50.156.000
1890	62.948.000
1900	75.995.000
1910	91.972.000