acarretando que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{4}$$

Para chegarmos à expressão da derivada encontrada anteriormente, isto é, $dy/dx = -[2/x^2]$, basta substituir o valor de $y$ em (4), ou seja

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

Quanto a $x^2 + y^2 = 1$, procedemos de igual maneira — derivamos ambos os membros da equação em relação à variável independente $x$ e, em seguida, expressamos em forma explícita o valor da derivada encontrada. Assim

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}[1]$$

ou seja

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

acarretando que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Logo, a derivada no ponto (0,1) (pertencente à curva), vale

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{0}{1} = 0$$

■

Enfim, para derivar uma equação em $x$, $y$ implicitamente em relação a $x$, consideramos $y$ como função de $x$, isto é, $y = y(x)$, em seguida aplicamos as regras de derivação contidas nos Teoremas 2.3 e 2.4 e, finalmente, expressamos *explicitamente* o valor de $dy/dx$ na equação derivada.

Uma das implicações importantes do método de derivação implícita é que ele nos permite obter a derivada da função inversa $f^{-1}$, conhecida a derivada de $f$. Em outras palavras, quando existe a derivada da função $f$, e quando $f$ possui inversa, é possível demonstrar que a derivada da inversa existe (o que não faremos aqui), e o método da derivação implícita nos dá os meios de exprimir a derivada da inversa $f^{-1}$ em termos da derivada de $f$. (Para facilitar a notação, vamos denotar $f^{-1}$ por $g$, isto é, $f^{-1} = g$.) Ora, temos que, se $y = f(x)$, então $x = g(y)$. Derivando agora implicitamente esta última expressão $[x = g(y)]$, em relação a $x$, vamos ter



$$1 = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ou seja

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

Vejamos agora como aplicar esta fórmula a um caso específico.

**Exemplo 2.17:** Já vimos que a inversa de $y = x^n$ é dada por $x = y^{1/n}$, ou seja, $g(y) = y^{1/n}$. Portanto, seguindo a fórmula apresentada acima para a derivada da função inversa, temos

$$\frac{dg}{dy} = 1\Big/\frac{dy}{dx} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\, y^{(1/n)-1}$$

Se trocarmos a notação, isto é, denotarmos a variável independente por $x$, a derivada da inversa assumirá a forma

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = (1/n)x^{(1/n)-1}$$

■

## EXERCÍCIOS

1. Determine a derivada de $y = f(x)$ em cada um dos itens seguintes:
   a. $f(x) = 9x^2 - 8x + 1$;
   b. $f(x) = -x^2 + 3$;
   c. $f(x) = 0{,}02x^2 - 0{,}1x$;
   d. $f(x) = (1 - x)^{20}$;
   e. $f(x) = (2 + 3x)^7$;
   f. $f(x) = (3 - x + 5x^2)^{37}$.
2. Um balão esférico está sendo inflado e seu raio é dado por $r = 3t$, onde $t$ é medido em min e $r$ em cm.
   a. Determine o volume do balão em função do tempo.
   b. Determine a velocidade segundo a qual o balão está sendo inflado no instante $t = 10$.
   c. Determine a área do balão em função do tempo.
   d. Determine a velocidade segundo a qual o balão aumenta.
3. Determine a velocidade segundo a qual cresce a mancha de óleo dada no Exemplo 1.18 do capítulo anterior.

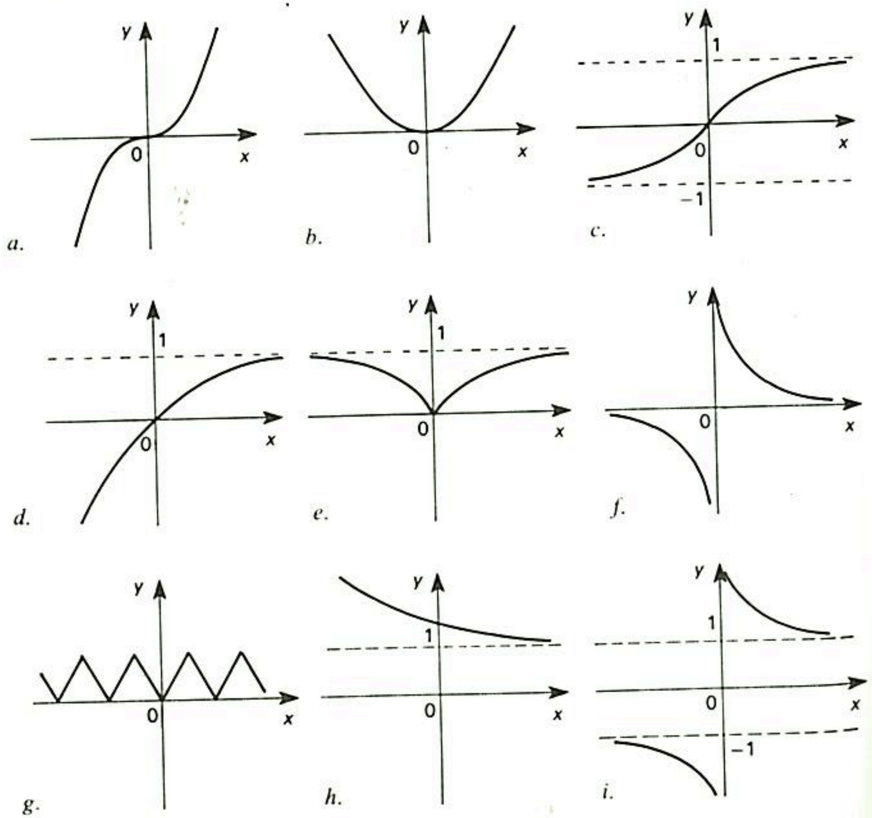
4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, no ponto $(a, f(a))$, se:

   *a.* $f(x) = 5x^2$, $a = 2$;
   *b.* $f(x) = -x^3$, $a = -1$;
   *c.* $f(x) = 1/x$, $a = 5$;
   *d.* $f(x) = -x + 6x^2$, $a = 0$;
   *e.* $f(x) = 1/x^2 + x$, $a = 2$;
   *f.* $f(x) = -(x^2 + 2x - 5)^4$, $a = 3$.

5. Através da definição apresentada no texto procurou-se formalizar o conceito de limite de uma função, isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se $x_0$ e $L$ são números reais (finitos).

   Contudo, é também importante que se estude o conceito de limite de uma função quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$ (diz-se o *limite no infinito*). Neste caso, é conveniente considerar a possibilidade do limite $L$ ser tanto finito como infinito ($+\infty$ ou $-\infty$).

   A fim de avaliar o sentimento e a intuição do leitor relativamente a tais idéias, apresentamos os gráficos de algumas funções; em cada caso, o aluno é solicitado a se pronunciar sobre a existência de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, bem como, quando um desses limites existir, explicitá-lo.





6. Em (*a*), (*b*) e (*f*) do exercício precedente, as funções envolvidas eram dadas através das expressões $y = x^3$; $y = x^2$ e $y = 1/x$, respectivamente. Pede-se, então, para estabelecerem-se as expressões algébricas plausíveis para representar os demais casos: (*c*), (*d*), (*e*), (*g*), (*h*) e (*i*).

7. Dizemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ quando, dado $K > 0$ (arbitrariamente grande), existir $N > 0$, tais que

$$x > N \Longrightarrow f(x) > K$$

   Pede-se expressar $N$, na dependência de $K$, no caso da função $y = x^2$, idem se $y = x^3$.

8. Seja $L$ um número real (finito). Dizemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ quando, dado $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeno), existir $N > 0$, de sorte que

$$x > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

   Expresse $N$ na dependência de $\varepsilon$, no caso da função dada por

   *a.* $f(x) = 1/x$;
   *b.* $f(x) = 1/x^2 + 3$.

9. Defina $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nos moldes das definições apresentadas nos dois exercícios precedentes. Da mesma forma, é possível definir, se $x_0$ é um número real (finito): $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

10. Consideremos a função

$$f(x) = [1 + x]^{1/x}, \qquad x > 0$$

   Calcule o valor de

$$\lim_{x \to 0} [1 + x]^{1/x}$$

   (*Sugestão*: calcule $f(x)$ para valores positivos de $x$ convergindo para zero.)

11. Seja $f(x) = [x]$ a função que associa a cada $x$ real o maior número inteiro que é menor ou igual a $x$.

   *a.* Estabeleça o gráfico da função.
   *b.* Para cada $n$ inteiro, determine

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x)$$

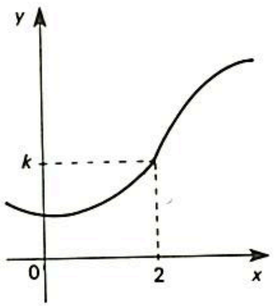
   *c.* Em que pontos da reta a função $f(x)$ é contínua?

12. A função $f$ é definida no intervalo $[-5, 5]$ através de $f(x) = x^2 - 6x + 5$; determine $\delta > 0$ tal que $|x - 5| < \delta \to |f(x)| < 1/100$.

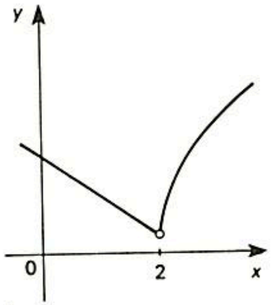
13. Calcule os seguintes limites:

   *a.* $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$
   *b.* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
   *c.* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x - 1}$
   *d.* $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x + 2 - 2}$

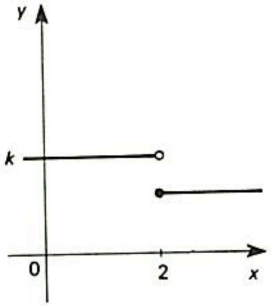
***14.** Nos exercícios (*a*) a (*f*), encontre os pontos onde $f(x)$ não é contínua. Justifique, em cada caso, a sua resposta.



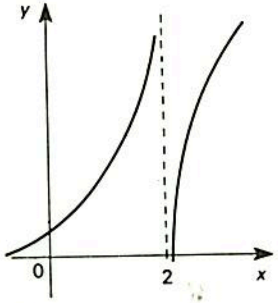

*a.*



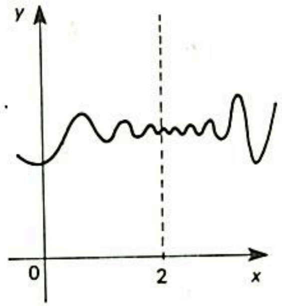

*b.*



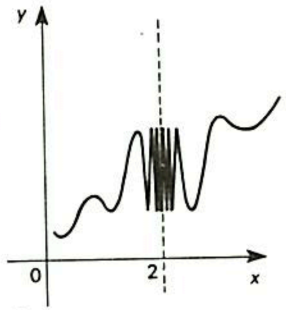

*c.*




*d.*




*e.*

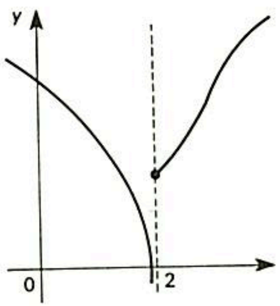



*f.*

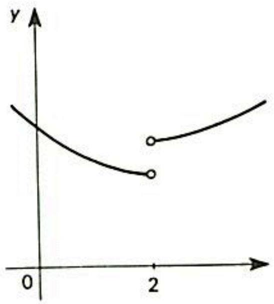
**15.** Esboce o gráfico de uma função contínua, onde sua derivada $f'(x)$ deixa de existir somente nos pontos $x = 2, 5, 8$ e $9$. O domínio da função deve ser todos os números reais.

**16.** Nos gráficos (*a*), (*b*) e (*c*), verifique se existe um número $a$ tal que

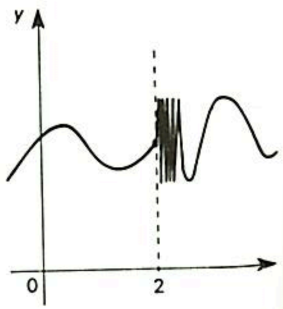
$$\lim_{x \to 2} f(x) = a.$$




*a.*




*b.*




*c.*



**17.** Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 2} g(x) = 5$, calcule:

*a.* $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$;
*b.* $\lim_{x \to 2} [f(x)g(x)]$;
*c.* $\lim_{x \to 2} [5f(x)/(8g(x))]$;
*d.* $\lim_{x \to 2} [-2f(x)7g(x)]$;
*e.* $\lim_{x \to 2} [6f(x)/9g(x)]$.

**18.** Obtenha $dy/dx$ pelo método da derivação implícita, se:

*a.* $y^3 = 4kx$
*b.* $y^3 - 3x + 2y = xy + a^2b^2$
*c.* $x - \sqrt{y} = 10$
*d.* $x^3y^2 + \sqrt{y^3} = k$

**19.** Determine a derivada das seguintes funções:

*a.* $[x^3 + 1][x^{-1} + 7] = y$
*b.* $[x^{-5} + 3][3x^{-1} + x] = y$
*c.* $\dfrac{3x^2 - 8x + 1}{x^3 + 5x + 20} = y$
*d.* $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 4}{x^2 - 7x} = y$
*e.* $\dfrac{x - 3x^2 + 7x - 6}{x^3 - 6} = y$
*f.* $\dfrac{x^{-7} + 3x + 8x}{(x^2 + 4)^3} = y$
*g.* $\dfrac{(\sqrt{x} - 1)(x^2 + 2x - 5)(2x)}{(x^2 + 3)(8x - 14)} = y$
*h.* $\dfrac{(x^{-4} + 1)(x^2 - 7x + 6)}{(x - 1)(x - 3)(x - 9)} = y$
*i.* $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}} = y$
*j.* $(a + x)(\sqrt{a - x}) = y$

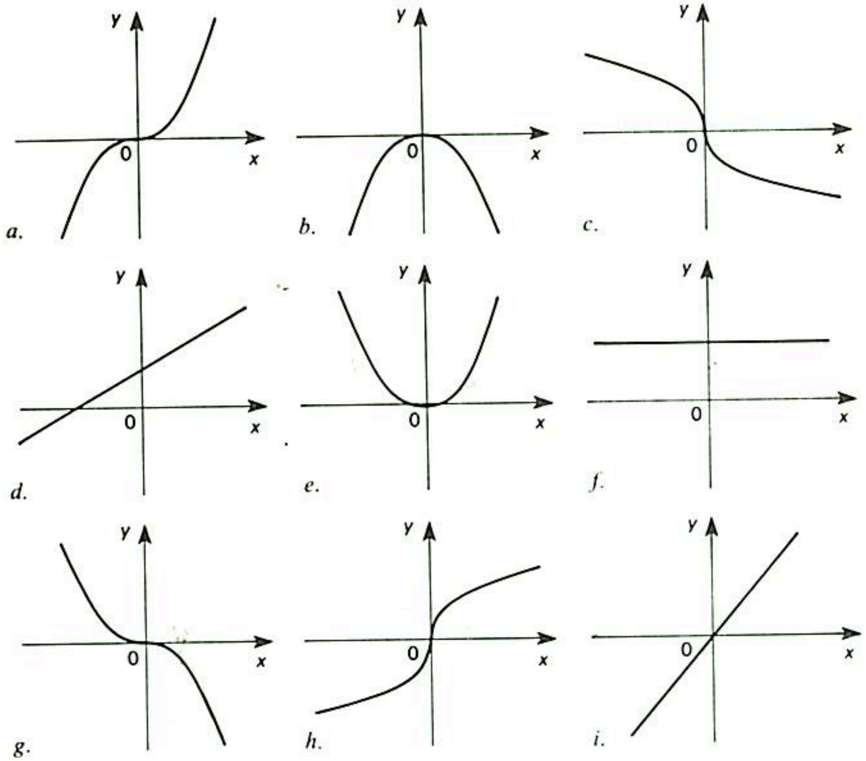
Para que valores de $x$ as funções dadas em (*d*) e (*h*) deixam de possuir derivada?

**20.** Considere as funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = 7x^3 + k$, onde $a$, $b$ e $k$ são constantes reais. Seja $y_1 = f(2)$ e $y_2 = g(-1)$. Sem explicitar as funções inversas dessas funções, calcule suas derivadas nos pontos $2$ e $-1$, respectivamente.

**21.** Calcule as derivadas das seguintes funções:

*a.* $f(x) = [x^3 - 2x + 7]^{111}$
*b.* $f(x) = \sqrt{x^3} + x^2$
*c.* $f(x) = [ax + bx - c]^5$
*d.* $f(x) = \sqrt{3x^2 + 15ax}$

**22.** Nas figuras (*a*) a (*i*), emparelhe os gráficos de funções com os de suas derivadas. O leitor não precisa se preocupar com as fórmulas analíticas que essas funções possam ter. Para responder à solicitação do problema é suficiente a forma geométrica assumida pelo gráfico.




**23.** Se $f(x) = x^{5/3}$, será verdade que $f$ admite derivada em $x = 0$? Justifique sua resposta.

***24.** Um sistema adiabático consistindo em um gás diatômico está se expandindo à razão de 60 $cm^3$/min. Se a pressão $P$, dada em torr, e o volume $V$ do gás, em $cm^3$, estão relacionados pela equação

$$P = \frac{8{,}7}{V^{1,5}}\, 10^5$$

exprima a taxa de variação da pressão no tempo, como função do volume.

**25.** Determine como varia a área de superfície corporal de um ser humano em função de seu peso. Faz sentido essa taxa de variação quando o peso for nulo? Por quê?

**26.** A taxa de variação do batimento cardíaco de um mamífero é inversamente proporcional ao seu peso corporal $p$, em quilogramas. Se $B$ denota o número de batimentos por minuto, então $B$ e $p$ estão relacionados pela fórmula

$$B(p) = 240p^{-0,25}$$



Faça um esboço da curva expressa pela equação anterior e determine sua tangente quando $p = 100$ kg. Para um homem pesando 80 kg, tal função aproxima o batimento cardíaco médio esperado?

****27.** Vamos supor que $N$ represente certa população em função do tempo $t$. Se

$$N(t) = a2^{-b2^{-t}}$$

onde $a$ e $b$ são constantes positivas, determine a taxa de crescimento dessa população. Que acontece com a taxa de crescimento para valores grandes de $t$? (Esta curva é conhecida como a *curva de Gompertz* e é utilizada para descrever o crescimento livre de certos tumores sólidos malignos.)

**28.** No decorrer de uma experiência em um laboratório, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro; verifica-se que o líquido vertido recobre uma região circular. Se o raio da região recoberta pelo líquido aumenta a uma taxa constante de 1,5 cm/s, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido em $cm^2$/s, quando o raio for igual a 5 cm?

**29.** Suponhamos que uma proteína de massa $m$ se decomponha em aminoácidos segundo a fórmula $m(t) = 25/(t + 3)$, onde $t$ representa o tempo medido em horas. Determine a taxa média de variação para os seguintes intervalos:

*a*. [0, 2];
*b*. [0, 1];
*c*. [0, 1/4].

Qual a taxa de variação (instantânea) para $t = 1/4$, 1 e 2?

**30.** A massa de uma cultura de bactérias viáveis tem seu crescimento representado pela função $M(t) = p_0 + 60t - 2{,}5t^2$ ($t$ medido em h e $M$ em $cm^3$), sendo $p_0$ uma constante positiva. Calcule a velocidade de crescimento dessa cultura quando $t = 6$ h. O que representa o ponto onde $M'(t) = 0$? E para os valores de $t$ onde $M'(t) < 0$ e $M(t) > 0$, o que estaria sucedendo com essa massa bacteriana? (*Sugestão*: esboce o gráfico de $M(t)$, incluindo algumas tangentes à curva dentro das condições acima.)

**31.** Alguns venenos químicos ao serem ingeridos pelo homem só apresentam seus efeitos maléficos decorrido um certo intervalo de tempo. Inicialmente, devem acumular-se no corpo até atingir determinado patamar para, então, surgirem os primeiros sintomas. Vamos supor que certo indivíduo ingira, diariamente, uma quantidade constante $x$ de um desses venenos e que consiga também eliminar diariamente de seu corpo uma percentagem constante da quantidade acumulada $x$ no organismo.

*a*. Determine a quantidade de veneno acumulada no corpo decorridos $n$ dias, contados a partir do início da contaminação.
*b*. A quantidade acumulada tenderia a atingir um certo valor limite, decorrido um grande número de dias?
*c*. Construa o gráfico deste modelo em um sistema de coordenadas onde o eixo das abscissas representa o tempo e o das ordenadas a quantidade acumulada do veneno.

**32.** O número de trinados emitidos por um grilo à noite, a cada 20 s, adicionados a 5, é proporcional à temperatura ambiente em °C, entre 15 e 35 graus. A faixa de variação do número de trinados entre as temperaturas máxima e mínima é igual a 100. Calcule quantos trinados são emitidos, a cada 20 s, quando a temperatura é de 21°.

*33. Duas espécies animais convivem em um nicho, onde uma delas tem na outra sua única fonte de alimentos. Sejam $x$ e $y$ o número de elementos de cada uma das duas famílias. Dados experimentais confirmam que elas estão relacionadas entre si através da equação

$$x^{-a}e^{bx} = y^{c}e^{-ky}$$

onde $a$, $b$, $c$ e $k$ são constantes positivas. Calcule a derivada de $y$ em relação a $x$, isto é, $dy/dx$, sabendo que a função $f(x)=e^x$ é tal que $f'(x)=e^x$.

*34. Muitas vezes, ao registrar-se o comportamento de um fenômeno, obtém-se uma tabela de dados sobre sua evolução e não uma função contínua para descrevê-lo. Contudo, é quase sempre possível, com ajuda de técnicas de cálculo numérico, obter uma função derivável que aproxima os dados obtidos experimentalmente. Em geral, exige-se que tal função, além de contínua, seja derivável.

Na hipótese de não se conhecer a função $f$, é possível estimar-se sua derivada em um ponto $x$, mediante a fórmula

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

onde a precisão irá depender, entre outros fatores, da proximidade dos valores observados (na tabela) e daqueles determinados pela função $f$, bem como do incremento $h$ etc.

Vamos supor que exista uma função $H = H(t)$ aproximando os valores encontrados na tabela abaixo, onde à variável $t$ representa o tempo medido em anos e $H$ é a altura de um indivíduo do sexo masculino, estimada em metros.

Crescimento de um indivíduo do sexo masculino em uma determinada população humana.

| $t$: idade em anos | $H$: em metros | $t$: idade em anos | $H$: em metros |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 0,60 | 11,0 | 1,19 |
| 1,5 | 0,64 | 11,5 | 1,22 |
| 2,0 | 0,68 | 12,0 | 1,26 |
| 2,5 | 0,70 | 12,5 | 1,30 |
| 3,0 | 0,72 | 13,0 | 1,34 |
| 3,5 | 0,74 | 13,5 | 1,39 |
| 4,0 | 0,79 | 14,0 | 1,45 |
| 4,5 | 0,84 | 14,5 | 1,49 |
| 5,0 | 0,92 | 15,0 | 1,53 |
| 5,5 | 0,97 | 15,5 | 1,57 |
| 6,0 | 1,01 | 16,0 | 1,61 |
| 6,5 | 1,04 | 16,5 | 1,66 |
| 7,0 | 1,06 | 17,0 | 1,68 |
| 7,5 | 1,09 | 17,5 | 1,71 |
| 8,0 | 1,10 | 18,0 | 1,72 |
| 8,5 | 1,11 | 18,5 | 1,73 |
| 9,0 | 1,12 | 19,0 | 1,74 |
| 9,5 | 1,13 | 19,5 | 1,75 |
| 10,0 | 1,15 | 20,0 | 1,75 |
| 10,5 | 1,17 | | |



Para facilitar, vamos chamar o indivíduo cujos dados estão na tabela anterior de João. Pela tabela, quando João tinha 1 ano de idade, media 0,60 m e aos 20 anos, 1,75 m.

*a*. Suponha que o crescimento de João tenha se processado de modo linear. A partir destes dados, qual seria a altura prevista de João aos 10 anos de idade?

*b*. Aos 10 anos, sua altura era de 1,15 m. Qual foi o erro cometido na previsão feita no item (*a*)?

*c*. Entre 10 e 15 anos, pode-se dizer que a taxa média de crescimento de João foi de 0,076 m/ano?

*d*. Entre 5-8 e 13-17 anos, incluindo os extremos, em qual desses dois períodos João cresceu mais rapidamente? Justifique sua resposta.

*e*. Qual foi o período em que João apresentou a maior taxa de crescimento?

35. Se $f(x)=x^2$, estime pela fórmula dada no Exercício 34 deste capítulo a derivada de $f$ em $x=5$, para $h=1$, $h=0{,}5$, $h=0{,}1$, $h=0{,}01$ e $h=0{,}001$. Expresse, percentualmente, o erro cometido em relação ao valor exato da derivada, isto é, $f'(5)=2\cdot 5=10$, para os vários $h$ dados acima.

36. Repita o exercício anterior, agora para a função $f(x)=x^3+2x^2-x$; $x=1$, $h=0{,}1$ e $h=0{,}01$.

**37. Mostre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

38. *Contração muscular*. Vimos no Exercício 50 do Capítulo 1 que a energia $E$ envolvida na contração isotônica de músculos estriados é expressa por $E = Px + ax = (P+a)x$, onde $Px$ representa o trabalho realizado e $ax$ é o calor produzido pelo encurtamento $x$.

*a*. Mostre que

$$\frac{dE}{dt}=v(P+a)$$

onde $v$ é a velocidade de contração.

*b*. A.V. Hill observou que a taxa de variação instantânea de energia depende linearmente da força de tensão exercida, isto é

$$\frac{dE}{dt}=b(P_0-P)$$

onde $P_0$ representa a tensão máxima, ocorrente em estado tetânico. Mostre que

$$(P+a)(v+b)=(P_0+a)b=k \text{ (constante)}$$

Reveja o Exemplo 1.10.

*39. *O brilho subjetivo da luz*. Suponhamos que o brilho de uma fonte luminosa percebido por um observador seja dado por:

$$B(l)=kl^b$$

onde $b$ e $k$ são constantes positivas e $l$ mede o brilho emitido pela fonte luminosa em lumens/m$^2$. As constantes $b$ e $k$ podem variar segundo as condições experimentais.