F078 / MS601 / MT621

Lista 2 (entrega em 06/04, antes da aula)

1. Considere um escoamento planar e estacionário com um sumidouro na origem:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{c}{r}\vec{e}_r \quad , \quad c>0 .$$

(a) Tal escoamento é incompressível?

(b) Calcule a vorticidade de tal fluido e seu tensor de deformação. Interprete fisicamente.

(c) Tal escoamento é estacionário no sentido euleriano? E no sentido lagrangiano?

(d) Calcule as pathlines e streamlines deste fluido

(e) Calcule a evolução temporal de um elemento de fluido que se encontra em $r=r_0$ para $t=0$. Quanto tempo deve passar para que este elemento "desapareça" em $r=0$?

2. Escoamento confinado a células. Considere

$$\vec{v}(x,y) = (\operatorname{sen}\pi x \cos\pi y, -\cos\pi x \operatorname{sen}\pi y) .$$

(a) Mesmo que o do exercício anterior.

(b) " " " " " "

(c) " " " " " "

(d) " " " " "

(e) Faça um diagrama indicando onde a velocidade de deformação é máxima e onde a vorticidade é máxima.

3. Escoamento de Couette. Considere a região W entre dois cilindros concêntricos de raios R_1 e R_2, $R_1 < R_2$. Considere

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{r} + Br\right)\hat{e}_\theta,$$

onde $A = -\dfrac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}$ e $B = -\dfrac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_2^2 - R_1^2}$.

(a) Interprete ω_1 e ω_2 fisicamente.

(b) Mostre que $\vec{v}$ é solução das eqs. de Euler com $\rho = $ cte.

(c) Calcule a vorticidade de tal fluido e seu tensor de deformação. Interprete fisicamente.

4. Seja $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho v^2 \, d\Omega$ a energia cinética em um volume V. Mostre que, para um volume material arbitrário,

$$\frac{dT}{dt} = \int_{V(t)} \rho \vec{f}\cdot\vec{v}\, d\Omega + \int_{\partial V(t)} \vec{\tau}\cdot\vec{v}\, dS - \int_{V(t)} T_{ij} D_{ij}\, d\Omega.$$

Interprete fisicamente. Mostre que, para um fluido ideal,

$$\frac{dT}{dt} = \int_{V(t)} \rho \vec{f}\cdot\vec{v}\, d\Omega - \int_{\partial V(t)} p\,\vec{v}\cdot d\vec{S} + \int_{V(t)} p\,\nabla\cdot\vec{v}\, d\Omega.$$

5. Acústica e propagação do som. Considere o escoamento 1D de um fluido ideal (invíscido).

(a) Mostre que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

(b) Suponha que o escoamento obedece a uma equação de estado $p = p(\rho)$, com $p\rho^{-\gamma} = \text{cte}$, $\gamma > 0$. Considere pequenas perturbações $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, $\tilde{v}$ da forma

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \\ p = p_0 + \tilde{p}, \\ v = 0 + \tilde{v}, \end{cases}$$

onde ρ_0 e p_0 são a densidade e a pressão (constantes) em repouso (i.e., quando $v = 0$), e $|\tilde{\rho}| << |\rho_0|$, $|\tilde{p}| << |p_0|$. Linearize as equações em (a) (i.e., expanda tudo em p_0, ρ_0 e despreze termos de ordem 2 nas quantidades com o til). Mostre então que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \simeq 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \simeq -\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \simeq \gamma \dfrac{p_0}{\rho_0}, \end{cases}$$

(note que o termo não linear na velocidade foi embora).

(c) Usando as equações de (b), mostre que $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$ e $\tilde{v}$ satisfazem a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

e determine c.