

Lista 7 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2022

1. Considere o campo de forças originado por um fio homogêneo, localizado sobre uma curva parametrizada por $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Suponha que um elemento de linha do fio, localizado na posição \mathbf{r}_0 , contribui com um potencial da forma $dV = f(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) ds$ (força central). O potencial resultante em um dado ponto \mathbf{r} é desta forma dado por $V(\mathbf{r}) = \int f(\|\mathbf{r} - \gamma(s)\|) ds$. Considere uma partícula teste sob a ação desse campo de força.

- (a) Encontre três constantes do movimento se o fio é uma reta infinita localizada sobre o eixo z .
- (b) Encontre duas constantes do movimento se o fio é uma hélice com eixo de simetria sobre o eixo z .

2. Considere novamente a lagrangiana para o problema de Kepler,

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{k}{r}.$$

Considere a transformação dada por $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_s = \vec{r} + s \delta \vec{r}$ com

$$\delta \vec{r} = \frac{1}{k} \left[2(\vec{r} \cdot \hat{n}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \hat{n} - (\dot{\vec{r}} \cdot \hat{n}) \vec{r} \right],$$

onde \hat{n} é um versor fixo em \mathbb{R}^3 .

- (a) Mostre que tal transformação é uma simetria do sistema, com

$$\delta_s L = \frac{dl}{dt}, \quad l = -2\hat{r} \cdot \hat{n}.$$

- (b) Mostre que a constante de movimento resultante do teorema de Noether é, neste caso, a componente do vetor de Runge-Lenz \vec{A} na direção de \hat{n} , isto é, $\vec{A} \cdot \hat{n}$.

3. *Uma forma mais geral para o teorema de Noether:* Consideremos o caso em que a lagrangiana depende do tempo, $L = L(q, \dot{q}, t)$. Consideremos a transformação

$$q \rightarrow q' = q'(q, \dot{q}, t; s), \quad t \rightarrow t' = t'(q, \dot{q}, t; s), \quad (1)$$

agindo em curvas $q(t)$ e tal que $q' = q$ e $t' = t$ quando $s = 0$. Para nós será suficiente considerar sua versão infinitesimal,

$$q \rightarrow q' = q + s \delta q + O(s^2), \quad t \rightarrow t' = t + s \delta t + O(s^2), \quad (2)$$

com $\delta q = \delta q(q, \dot{q}, t)$ e $\delta t = \delta t(q, \dot{q}, t)$. Estamos interessados em transformações que preservam as equações de movimento do sistema. Isso ocorre quando esta transformação leva extremos da ação $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ (quando mantemos os pontos inicial $q(t_1)$ e final $q(t_2)$ fixados) em extremos da ação $S[q'(t)] = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q', \dot{q}', t') dt'$ (quando mantemos os pontos inicial $q'(t'_1)$ e final $q'(t'_2)$ fixados).

(a) Fazendo a mudança de variável $t_s \rightarrow t$ na integral da ação, mostre que

$$S'[q'(t)] - S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) \right] dt.$$

Assim, as equações de movimento são preservadas se

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = \frac{dF}{dt} \quad (3)$$

para alguma função $F = F(q, t; s)$. Ou, em sua versão infinitesimal,

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = s \frac{df}{dt} + O(s^2), \quad (4)$$

onde $f(q, t) = \left. \frac{\partial F(q, t; s)}{\partial s} \right|_{s=0}$. Neste caso, dizemos que a transformação é uma simetria do sistema.

(b) Por outro lado, podemos expandir diretamente a expressão de $L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt}$ em s . Mostre que se $q(t)$ é solução das equações de movimento então

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}, t) = s \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q} \delta t) + L \delta t \right] + O(s^2).$$

(c) Combinando os resultados de (a) e (b) mostre que se a transformação é uma simetria do sistema então a quantidade

$$Q = p \delta q - E \delta t + f$$

é constante do movimento, onde $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e $E = p \dot{q} - L$.

(d) Generalize para o caso de vários graus de liberdade, $q = (q^1, \dots, q^k)$ e mostre que a quantidade conservada é, neste caso,

$$Q = p_i \delta q^i - E \delta t + f. \quad (5)$$

Na prática, dado um sistema lagrangiano e uma transformação como a acima, fazemos os seguintes passos para identificar uma possível quantidade conservada como a acima.

i. Calculamos $\delta_s L := \left. \frac{d}{ds} \left[L' \frac{dt'}{dt} \right] \right|_{s=0}$;

- ii. Achamos, se possível (e isso só ocorre quando a transformação é de fato uma simetria), uma função $f(q, t)$ tal que $\delta_s L = \frac{df}{dt}$;
- iii. Determinamos a quantidade conservada correspondente, dada por (5).
4. Use o exercício anterior para determinar, se possível, quantidades conservadas nos seguintes sistemas lagrangianos:
- (a) Uma partícula em um campo externo escalar produzido por uma onda plana se propagando na direção de \vec{u} ,

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r} - t\vec{u}).$$

- (b) Uma partícula em um potencial homogêneo, da forma $V(\alpha\vec{r}) = \alpha^n V(\vec{r})$. Dica: considere a transformação $\vec{r}' = \alpha\vec{r}$ e $t' = \beta t$ e explore.