Lista 6 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2022

1. Seja M uma variedade de dimensão n e sejam $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$. Mostre que:

   (a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$;

   (b) $d\,(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$.

2. Suponhamos que V seja um espaço vetorial de dimensão n munido da métrica g. Os isomorfismos musicais induzem uma métrica em V^* por $g(\alpha, \beta) := g(\alpha^\#, \beta^\#)$. Sejam $\{e_i\}$ base de V e $g_{ij} = g(\mathrm{e}_i, e_j)$. Mostre que, se θ^i é a base dual correspondente em V^*, então $g(\theta^i, \theta^j) = g^{ij}$.

3. A métrica do exercício anterior pode ser estendida a $\Lambda^k(V)$ por $g(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k) = \det(g(\alpha_i, \beta_j))$. Mostre que, com isso, $g(\omega, \eta) = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \eta_{j_1 \cdots j_k}$, com as notações usuais.

4. O operador estrela de Hodge implementa um isomorfismo entre $\Omega^{n-k}(M)$ e $\Omega^k(M)$, onde M é variedade de dimensão n. Se vol é o elemento de volume em M e $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos $\star\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ como a $(n-k)$-forma que satisfaz $\eta \wedge (\star\omega) = g(\eta, \omega) vol$ para todo $\eta \in \Omega^k$.

   (a) Mostre que para $M = \mathbb{R}^3$, com coordenadas cartesianas x, y, z e $vol = dx \wedge dy \wedge dz$, temos $\star 1 = vol$, $\star dx = dy \wedge dz$, $\star dy = dz \wedge dx$, $\star dz = dx \wedge dy$, $\star(dx \wedge dy) = dz$, $\star(dy \wedge dz) = dx$, $\star(dz \wedge dx) = dy$ e $\star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$.

   (b) Mostre, usando as coordenadas do item anterior, que dados um campo escalar f e um campo vetorial $\vec{A}$ em $\mathbb{R}^3$, temos $\nabla f = (df)^\#$, $\nabla \times \vec{A} = (\star(d\vec{A}^\flat))^\#$ e $\nabla \cdot \vec{A} = (d(\star(\vec{A}^\flat)))^\#$. Finalmente, observe que os lados direitos dessas expressões não dependem do sistema de coordenadas usado e assim dão expressões para o gradiente, rotacional e divergente que valem em coordenadas arbitrárias.

   (c) Calcule o elemento de volume e a ação do operador estrela de Hodge ainda em $M = \mathbb{R}^3$ mas agora em coordenadas esféricas.

   (d) Usando os itens anteriores, obtenha expressões para o gradiente, rotacional e divergente em coordenadas esféricas.

5. $(*)$ Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M e N com $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$. Sejam $\{x^1, \ldots, x^m\}$ e $\{y^1, \ldots, y^n\}$ coordenadas locais em M e N em torno dos pontos $p \in M$ e $F(p) \in N$. Mostre que:

(a) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$, onde $\omega, \eta \in \Omega(N)$;

(b) $F^*\left(\omega_{i_1 \cdots i_k}\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = (\omega_{i_1 \cdots i_k} \circ F)\; d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$;

(c) Se $m = n$, então $F^*\left(dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_n}\right) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$ (note que $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ é a matriz jacobiana de F nas coordenadas acima).

6. $(*)$ Seja Muma variedade n-dimensional com coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$. Seja $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ uma n-forma em M. Definamos

$$\int_V \omega = \int \cdots \int_R f\, dx^1 \cdots dx^n,$$

onde o lado direito é a integral múltipla usual de cálculo e V é uma região bem comportada de M mapeada em $R \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que essa definição independe do sistema de coordenadas.

7. $(*)$ Seja N uma subvariedade p-dimensional da variedade do exercício anterior, $p \leq n$, com coordenadas $(u^1, \ldots, u^p)$. Seja $\eta = \eta_{i_1 \cdots i_p}\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p}$ uma p-forma em N.[1] Dada uma região bem comportada S em N definamos

$$\int_S \eta = \int_S \eta_{i_1 \cdots i_p}\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p},$$

onde cada termo da soma do lado direito é definido no exercício anterior. Se $\sigma : R \subset \mathbb{R}^p \to N$ é uma parametrização de $N \subset M$, mostre que

$$\int_S \eta = \int_R \sigma^* \eta.$$

8. $(*)$ Sabemos que toda forma exata é fechada, já que $d^2 = 0$. Reciprocamente, seja ω uma p-forma fechada definida em uma bola aberta de R^n. Mostre que é possível encontrar uma $(p-1)$-forma η tal que $\omega = d\eta$ (isto é, ω neste caso é exata). Esse resultado vale se retirarmos a hipótese de que ω é bem definida na bola aberta inteira?

[1] Tal η pode ser pensada como uma forma $\bar{\eta}$ de M restrita a N por $\eta = i^*\bar{\eta}$, onde $i : N \to M$ é a inclusão de N em M.