Lista 4 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2022

1. Dadas coordenadas generalizadas $q^1, \dots, q^k$ no espaço de configurações e as equações de Euler-Lagrange
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, k,$$
onde $F = F(q^1, \dots, q^k, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k, t)$, considere a transformação genérica (dependente do tempo)
$$s^i = s^i(q^1, \dots, q^k, t), \qquad i = 1, \dots, k. \tag{1}$$
Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes por (1), isto é, que
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, k.$$

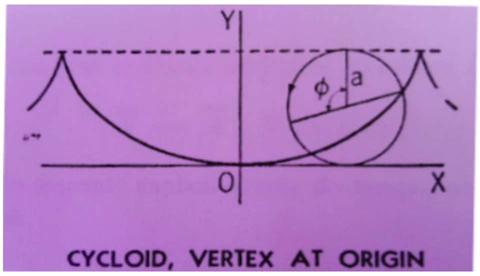
2. Ache a curva ligando dois pontos a alturas diferentes de tal forma que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto atinja o ponto mais baixo no menor tempo possível, deslizando pela curva sem atrito e sob a ação da gravidade. Tal curva é a famosa braquistócrona. Informe-se sobre sua história.[1]

3. Se mergulharmos dois anéis de arame em uma solução de água com sabão, qual será a superfície formada pela bolha de sabão resultante? Esse é o chamado problema de Plateau que consiste em achar a superfície mínima que satisfaz dadas condições de contorno. Suponha que os aneis tenham o mesmo eixo de simetria como na figura ao lado e determine tal superfície.

4. Considere a lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ de um sistema mecânico. Mostre que
$$L' = L + \frac{dF(\vec{q}, t)}{dt}$$
define o mesmo sistema físico (isto é, que uma trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange para L se, e somente se, satisfaz para L').

5. Uma conta de de massa m escorrega por um fio sem atrito. A curva do fio tem a forma de uma cicloide, como mostra a figura abaixo.

[1] Veja, por exemplo, `https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve`.



$$\begin{cases} x = a(\phi + \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(1-\cos\phi) \end{cases}$$

com $-\pi < \phi < \pi$

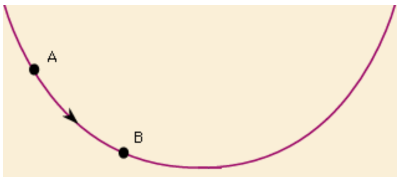
(a) Considere o sistema sob a ação da gravidade (na direção de $-\hat{y}$). Encontre a lagrangiana e escreva as equações de movimento (considere o zero do potencial no vértice da cicloide).

(b) O movimento da coordenada ϕ é oscilatório. Encontre o período correspondente. Dica: utilize a integral da energia (quadratura).

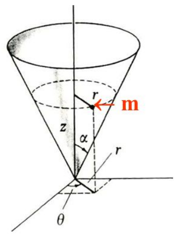
(c) Mostre que a variável $\eta = \operatorname{sen}\phi/2$ realiza movimento harmônico simples e integre a equação de movimento.

(d) Seu resultado está de acordo com a conclusão que segue do exercício 6 a seguir?

6. Uma partícula de massa m desliza sem atrito sobre uma rampa e sob a ação da gravidade, como na figura ao lado. Deduza a forma da curva que faz com que o período de oscilação independa da energia.



7. Considere uma partícula de massa m se movendo sobre um cone, sem atrito e sob a ação da gravidade, como mostra a figura ao lado. O cone tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem. Sejam r e θ dados pelas coordenadas cilíndricas usuais.



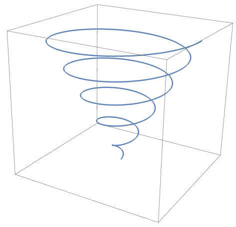
(a) Ache as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$.

(b) Mostre que existem soluções onde $r(t) = r_0$, r_0 constante. Qual é a frequência ω correspondente neste caso?

(c) Esta órbita é estável? Se sim, qual é a frequência Ω para pequenas oscilações em torno do raio r_0?

(d) Sob que condições temos $\Omega = \omega$?

8. Considere uma partícula de massa m se movendo sem atrito e sob a ação da gravidade em uma espiral cônica, como mostra a figura ao lado. O cone que contém a espiral tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem.



   (a) Encontre as equação de movimento da partícula se a espiral roda em torno do eixo de simetria com velocidade angular constante ω.

   (b) Para qual valor de ω a partícula permanece sempre em uma mesma altura z_0?

9. Considere uma partícula de referência de massa m caindo do repouso de uma altura R sob a ação da força de Kepler. Agora considere um haltere formado por duas partículas, de massa $m/2$ cada, presas entre si por uma barra sem massa de comprimento l.

   (a) Deixe esse haltere cair do repouso com altura inicial de seu centro de massa sendo também R (veja a figura abaixo à esquerda). Quem cai mais rápido, o haltere ou a partícula de referência?

   (b) Suponha agora que $l = l(t)$ depende do tempo e que inicialmente o haltere está fechado ($l(0) = 0$), se abre até um tamanho final L, e então novamente se fecha, levando para completar esse ciclo um tempo T. Assim, tanto em $t = 0$ quanto em $t = T$ o haltere é nada mais que uma partícula de massa total m (veja a figura abaixo à direita). Quem cai mais rápido, a partícula que se dividiu e se juntou ou a partícula de referência?

Exercício Extra:

Nosso objetivo aqui é resolver quantitativamente o exercício anterior, calculando a diferença entre as alturas do haltere oscilante e da partícula de referência ao final de um ciclo. Trabalhando sempre na ordem mais baixa possível de L e T que capture o efeito acima, mostre que

$$\delta r \approx -K\,\frac{L^2T^2}{R^4},$$

onde a constante positiva K depende de G (constante da gravitação universal), M (massa central, que gera o campo) e de uma integral adimensional envolvendo $l(t)$.