

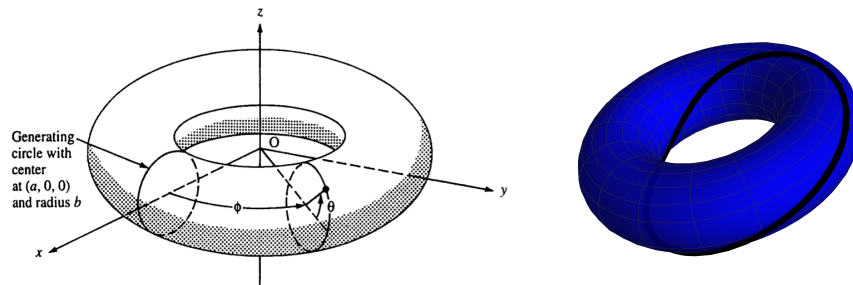
Lista 3 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2022

Notação: nesta lista usaremos a seguinte convenção para os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}).$$

1. Considere o toro mostrado na figura abaixo (à esquerda):
 - (a) Parametrize tal superfície usando as coordenadas θ e ϕ da figura.
 - (b) Obtenha expressões para os vetores e_i da base coordenada correspondente e para o tensor métrico g_{ij} .
 - (c) Obtenha expressões para e^i e g^{ij} .
 - (d) Usando o que você obteve no item (b) escreva a integral que corresponde ao comprimento da curva dada por $\phi = \phi_0$ que abraça o toro e a calcule. Faça o mesmo para a curva $\theta = \theta_0$.
 - (e) Escreva a integral que corresponde ao comprimento de uma curva que dá uma volta no toro como na figura da direita (escolha uma).



2. Considere a espiral esférica (ou loxodromia) dada pela curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S^2$, onde

$$x(t) = \cos(t) \operatorname{sech}(mt),$$

$$y(t) = \sin(t) \operatorname{sech}(mt),$$

$$z(t) = -\tanh(mt),$$

com $-\infty < t < \infty$ e $m \geq 0$.

- (a) Esboce C .
- (b) Obtenha a parametrização acima em coordenadas esféricas (isto é, $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$).
- (c) Encontre expressões para $\dot{\mathbf{r}}(t)$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ de $T_{\mathbf{r}(t)}\mathbb{R}^3$ e na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\}$ de $T_{\mathbf{r}(t)}S^2$.
- (d) Calcule o ângulo que tal curva faz com $\frac{\partial}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial}{\partial \phi}$ para cada t . Interprete. Dica: faça $\frac{m}{1+m^2} = \cos \alpha$.
- (e) Calcule o comprimento de tal curva. Interprete.
3. Considere a superfície de uma esfera S de raio a .
- (a) Escreva o tensor métrico nas coordenadas esféricas usuais (θ, ϕ) .
- (b) Ache os coeficientes de conexão associados.
- (c) Considere um vetor X_0 de coordenadas X_0^μ no ponto $p \in S$ de coordenadas $(\theta, \phi) = (\theta_0, 0)$. Escreva o problema de Cauchy correspondente a fazer o transporte paralelo de X_0 ao longo do paralelo $\theta = \theta_0$ dando uma volta completa em ϕ de 0 a 2π .
- (d) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/2$. Interprete o resultado.
- (e) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/3$. Interprete o resultado.
4. (*) Dadas coordenadas locais (u^α) e $(u^{\alpha'})$, mostre que os coeficientes de conexão correspondentes se transformam como

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\alpha'} = U_{\alpha'}^{\alpha} U_{\mu'}^{\mu} U_{\nu'}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - U_{\mu'}^{\kappa} U_{\nu'}^{\gamma} U_{\kappa\gamma}^{\alpha'}$$

onde $U_{\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha'}}$ e $U_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial u^{\mu} \partial u^{\nu}}$. Use isso para mostrar explicitamente que as componentes da derivada covariante de um campo vetorial, $V^{\alpha}_{;\mu} = \partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V^{\nu}$, transformam-se tensorialmente, isto é,

$$V^{\alpha'}_{;\mu'} = U_{\alpha'}^{\alpha} U_{\mu'}^{\mu} V^{\alpha}_{;\mu}$$

(claro que há maneiras mais espertas de se fazer isso, mas o exercício é esse).

5. (*) Mostre que
- (a) $g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta\alpha}$;
- (b) $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} \ln \sqrt{|g|}$;
- (c) $X^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{|g|} X^{\mu} \right)$.