

Lista 2 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2022

1. **O vetor de Runge-Lenz** Considere uma partícula de massa m sob a ação de uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{e}_r$.

(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right),$$

onde \vec{p} é o momento linear e \vec{L} o momento angular do corpo.

(b) Mostre que, para o problema de Kepler (isto é, $f(r) = -k/r^2$), o vetor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$$

é conservado e fica no plano do movimento. Esse é o chamado *vetor de Runge-Lenz*.

(c) Usando coordenadas polares (r, θ) no plano do movimento do corpo, mostre que

$$Ar \cos \theta = L^2 - mkr.$$

(d) Segue que

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta},$$

onde $r_0 = \frac{L^2}{mk}$ e $e = \frac{A}{mk}$. Interprete detalhadamente.

2. Mostre que, em termos de coordenadas relativas ao centro de massa \vec{R} ,

$$\vec{r}_i' := \vec{r}_i - \vec{R},$$

temos, para $M = \sum_i m_i$ e $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$:

(a) $\sum_i m_i \vec{r}_i' = \vec{0}$;

(b) $T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$;

(c) $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i'$.

Interprete detalhadamente.

3. Considere um sistema de duas partículas satisfazendo a terceira lei de Newton na forma forte. Mostre que tal sistema, quando expresso em termos de coordenadas relativas ao centro de massa, é equivalente a um sistema de uma partícula sob a ação de um potencial central. Qual é a massa efetiva neste caso? Re-interprete o problema de Kepler como um problema de dois corpos.

4. Suponha que as forças de interação em um sistema fechado de n partículas são todas da forma

$$\vec{F}_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \vec{e}_{ij},$$

onde $\vec{e}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$. Mostre que tal sistema é conservativo. Dica: fazendo $V_{op}(\vec{r}) = -\int f(r) dr$, $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i \neq j} V_{op}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$.

5. Considere um planeta X com raio R_X e massa m_X . Suponha que $R_X = \alpha R_{\text{Terra}}$ e $m_X = \beta m_{\text{Terra}}$. Denotando por g e v a aceleração da gravidade e a velocidade de escape em X, determine $\frac{g_X}{g_{\text{Terra}}}$ e $\frac{v_X}{v_{\text{Terra}}}$.

Exercício extra: O teorema de Bertrand.

Considere uma força central $F(\vec{r}) = -\nabla V(r)$. O objetivo deste problema é mostrar o teorema de Bertrand: os únicos potenciais centrais com a propriedade de que todas as órbitas limitadas são fechadas são o potencial de Kepler e o do oscilador harmônico.

(a) Mostre que um potencial central $V(r)$ tem uma órbita circular em $r=R$ se $V'(R) = \frac{l^2}{mR^3}$.

Mostre que esta órbita é estável se

$$V''(R) + \frac{3}{R} V'(R) > 0.$$

(b) Em uma órbita limitada não circular a partícula se encontra confinada na região $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. Os pontos em que r atinge um extremo são chamados apsides. A separação angular entre duas apsides consecutivas é denominada ângulo apsidal $\Delta\varphi$ (por exemplo, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ para uma órbita elíptica).

Mostre que o ângulo apsidal para órbitas quase-circulares é

$$\Delta\varphi = \pi \sqrt{\frac{V'(R)}{3V'(R) + R V''(R)}}$$

onde R é o raio da órbita circular.

(c) Mostre que os únicos potenciais centrais para os quais $\Delta\varphi$ é independente de R em (b) são da forma $V(r) = a r^\alpha$ ($\alpha > -2$ e $\alpha \neq 0$) e $V(r) = b \ln(r)$.

(d) Para os potenciais do item (c), mostre que $\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2+\alpha}}$ onde $\alpha = 0$ corresponde ao caso

logarítmico

(e) Para os casos em que $V(r) = a r^\alpha$ com $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ (i.e., para $\alpha > 0$ (com $a > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que $\lim_{E \rightarrow \infty} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(f) Para os casos em que $V(r) = -k r^{-\beta}$ com $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ (i.e., $0 < \beta < 2$ (com $k > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que

$$\lim_{E \rightarrow 0^+} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2 - \beta}$$

(g) Usando os itens anteriores, mostre o lema de Bertrand.