

Lista 10 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2022

1. Dada uma função $f = f(q^i, p_i, t)$ no espaço de fases estendido, mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = -\{p_i, f\} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \{q^i, f\}.$$

Interprete estes resultados de acordo com a discussão, vista em aula, de que q^i e p_i são geradores de translações em p_i e q^i .

2. Considere o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, isto é, $L_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j$. Mostre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

que, como vimos, são as relações de comutação de $\mathfrak{so}(3)$. Mostre ainda que $\{L_i, L^2\} = 0$, onde $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

3. Considere uma hamiltoniana proveniente de uma força central,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(r), \quad (1)$$

onde $r = \|\vec{r}\|$.

- (a) Mostre que $\{L_i, H\} = 0$, $i = 1, 2, 3$.
- (b) Mostre que $\{L^2, H\} = 0$.
- (c) No contexto do teorema de Noether (versão hamiltoniana), qual é a simetria gerada pela quantidade conservada L_3 ? Aqui você deve fazer o cálculo explícito de \vec{X}_{L_3} e então achar suas curvas integrais. Dica: coordenadas cilíndricas.
- (d) Estenda o resultado do item anterior para a quantidade conservada $l_{\vec{a}} = a^i L_i$, onde a^i são constantes. Dica: seja esperto.

4. *Vetor de Runge-Lenz novamente*

Vimos (muitas vezes) que o vetor de Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$$

é conservado no problema de Kepler,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{k}{r}. \quad (2)$$

- (a) Chegue a esta conclusão novamente, mostrando agora que $\{\vec{A}, H\} = 0$. Desta forma, temos seis quantidades conservadas aqui: L_i e A_i , $i = 1, 2, 3$.
- (b) Vejamos como isso faz com que o grupo de simetrias do problema de Kepler (2) seja maior que o de (1). Vimos que as quantidades conservadas de um sistema hamiltoniano fecham uma álgebra. Vamos calculá-la aqui. Mostre que:
- i. $\{L_a, A_b\} = \epsilon_{abc}A_c$
 - ii. $\{A_a, A_b\} = K\epsilon_{abc}L_c$, onde K é uma constante positiva para o caso ligado ($E < 0$).
- (c) Assim, a álgebra de Lie gerada por essas seis constantes do movimento é, para o caso ligado e após renormalizar A_i :

$$\begin{aligned}\{L_a, L_b\} &= \epsilon_{abc}L_c; \\ \{L_a, A_b\} &= \epsilon_{abc}A_c; \\ \{A_a, A_b\} &= \epsilon_{abc}L_c.\end{aligned}$$

Que álgebra, vista em aula, é essa?

Conclusão: O problema de Kepler tem um grupo de simetrias maior que o grupo de rotações de \mathbb{R}^3 : o primeiro é gerado por $\mathfrak{so}(4)$ e o segundo por $\mathfrak{so}(3)$. Desta forma, o problema de Kepler tem uma “simetria escondida” que faz com que o usual $\mathfrak{so}(3)$ de (1) seja aumentado para um $\mathfrak{so}(4)$, que gera o grupo de rotações de \mathbb{R}^4 , ainda que o problema “viva” em \mathbb{R}^3 !

5. Considere uma partícula de massa m sob a ação de um campo gravitacional constante, $V(q) = mgq$.
- (a) Calcule a ação clássica reduzida $S_{cl}^* = S_{cl}^*(q, E)$ (*on-shell*).
 - (b) Mostre que $W = S_{cl}^*(q, E)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = E.$$

(Vimos que isso vale em geral; o objetivo do exercício é verificar isso explicitamente neste caso específico).

6. Considere um potencial linearmente dependente do tempo para um sistema hamiltoniano 1D, com $H = \frac{p^2}{2m} + mAxt$, onde A é constante. Resolva as equações de movimento usando o método de Hamilton-Jacobi, com condições iniciais $x(0) = 0$ e $p(0) = mv_0$. Dica: considere o *ansatz* $S(x, t) = f(t)g(x) + h(t)$.