Lista 1 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2022

1. Mostre que, após adimensionalizar as quantidades físicas relevantes, o movimento de um pêndulo sob a ação da gravidade pode ser modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + \operatorname{sen}(x) = 0.$$

Desenhe seu diagrama de fases. Discuta os possíveis tipos de movimento.

2. Considere uma partícula de massa $m = 1/2$ movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Faça um esboço de $V(x)$ e discuta os possíveis tipos de movimento. Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e discuta sua estabilidade. Encontre explicitamente a solução da trajetória para o caso particular onde $x(0) = 0$ e $E = 1/4$. (Exercício retirado das notas de aula do Marcus Aguiar).

3. Uma partícula de massa m está sujeita à força elástica $F = -kx$ e à força de atrito $F_a = -b\dot{x}$, onde k e b são constantes positivas. Encontre $x(t)$ e discuta os possíveis tipos de movimento que podem ocorrer. (Exercício retirado das notas de aula do Marcus Aguiar).

4. Vimos que dado um poço de potencial em um sistema 1D pode-se achar o período das oscilações T, que é função da energia, pela fórmula

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{1}$$

onde x_1 e x_2 são os pontos de retorno, dados pelas raízes de $E - V(x) = 0$.

Determine $T(E)$ para os potenciais abaixo:

   (a) $V(x) = A|x|^n$, $A > 0$;

   (b) (*) $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$, $-V_0 < E < 0$;

   (c) (*) $V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2(\alpha x)$, $V_0 > 0$.

5. (*) O objetivo deste problema é mostrar que o conhecimento de $T(E)$ permite que se recupere o potencial $V(x)$. Considere que $V(x)$ tem seu mínimo em $x = 0$, com $V(0) = 0$, e que é um potencial par, sem outros pontos de mínimo ou máximo. Temos aqui um problema inverso em que queremos inverter (1) para achar $V(x)$ em termos de $T(E)$.

(a) Multiplique (1) por $\frac{1}{\sqrt{\alpha-E}}$ e integre ambos os lados em E de 0 a α para obter

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = 2\sqrt{2m}\int_0^\alpha dE \int_0^E dV \frac{dx}{dV}\frac{1}{\sqrt{\alpha - E}\sqrt{E - V}},$$

onde fizemos a mudança de variáveis $x = x(V)$ (para integrar em V);

(b) Troque a ordem de integração e integre em E para mostrar que

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = 2\pi\sqrt{2m}\left[x(\alpha) - x(0)\right].$$

(c) Conclua que a $V(x)$ é dado implicitamente por

$$x(V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^V \frac{T(E)dE}{\sqrt{V - E}}.$$

(d) Suponha que $T(E) = T_0$ é independente de E. Determine o potencial $V(x)$ correspondente. Interprete.