

Lista 8 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2021

1. Considere um oscilador harmônico 1D, com lagrangiana

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Seja $S_c = S_c(q_1, q_2, t_1, t_2)$ a ação calculada no caminho clássico que começa em (t_1, q_1) e termina em (t_2, q_2) .

- (a) Mostre que

$$S_c = S_c(q_1, q_2, t_1, t_1 + \tau) = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega\tau)} [(q_1^2 + q_2^2) \cos(\omega\tau) - 2q_1 q_2].$$

- (b) Note que

$$\left| \frac{\partial^2 S_c}{\partial q_1 \partial q_2} \right| \rightarrow \infty$$

nos pontos focais, isto é, para $\tau = n(\text{período}/2) = \frac{n\pi}{\omega}$.

- (c) Verifique, para este caso, as relações

$$\frac{\partial S_c}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial S_c}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial S_c}{\partial t_1} = H_1, \quad \frac{\partial S_c}{\partial t_2} = -H_2.$$

2. (*) Ainda considerando o oscilador harmônico, exiba uma trajetória clássica que não é um mínimo local da ação. Mais explicitamente, exiba uma solução clássica $\gamma_c(t)$ e uma configuração perturbada $\gamma_p(t)$ que passe pelos mesmos pontos inicial e final de $\gamma_c(t)$ e tal que $S[\gamma_p] < S[\gamma_c]$. Fique à vontade para usar recursos computacionais.

3. Considere uma hamiltoniana de um sistema 1D dependente do tempo $H(q, p, t)$. Vamos fazer um *upgrade* da variável t para uma nova coordenada, juntamente com seu momento generalizado correspondente p_t . Definamos a hamiltoniana no novo espaço de fases (agora com 4 variáveis) por $\bar{H} = \bar{H}(q, t, p, p_t) = H(q, p, t) + p_t$. Assim, a hamiltoniana nas novas variáveis fica independente do novo parâmetro de “tempo”, que denotaremos por τ .

- (a) Escreva as novas equações de movimento para $\dot{q}, \dot{t}, \dot{p}$ e \dot{p}_t , onde agora o ponto denota derivada com relação a τ .
- (b) Interprete o novo parâmetro de “tempo” τ e p_t em termos da dinâmica original.
- (c) A nova hamiltoniana \bar{H} é conservada, já que independe de τ . Que valor ela assume?

Obs.: Note que, assim como as variáveis antigas q e p , as “variáveis auxiliares” t e p_t vão precisar de condições iniciais em $\tau = 0$. Escolha estas condições iniciais de maneira que os itens (b) e (c) tenham as respostas mais elegantes possíveis.