

Lista 6 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2021

1. Seja M uma variedade de dimensão n e sejam $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$. Mostre que:
 - (a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$;
 - (b) $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$.
2. Suponhamos que V seja um espaço vetorial de dimensão n munido da métrica g . Os isomorfismos musicais induzem uma métrica em V^* por $g(\alpha, \beta) := g(\alpha^\#, \beta^\#)$. Sejam $\{e_i\}$ base de V e $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Mostre que, se θ^i é a base dual correspondente em V^* , então $g(\theta^i, \theta^j) = g^{ij}$.
3. A métrica do exercício anterior pode ser estendida a $\Lambda^k(V)$ por $g(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k) = \det(g(\alpha_i, \beta_j))$. Mostre que, com isso, $g(\omega, \eta) = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_k}$, com as notações usuais.
4. O operador estrela de Hodge implementa um isomorfismo entre $\Omega^{n-k}(M)$ e $\Omega^k(M)$, onde M é variedade de dimensão n . Se vol é o elemento de volume em M e $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos $\star\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ como a $(n-k)$ -forma que satisfaz $\eta \wedge (\star\omega) = g(\eta, \omega) vol$ para todo $\eta \in \Omega^k$.
 - (a) Mostre que para $M = \mathbb{R}^3$, com coordenadas cartesianas x, y, z e $vol = dx \wedge dy \wedge dz$, temos $\star 1 = vol$, $\star dx = dy \wedge dz$, $\star dy = dz \wedge dx$, $\star dz = dx \wedge dy$, $\star(dx \wedge dy) = dz$, $\star(dy \wedge dz) = dx$, $\star(dz \wedge dx) = dy$ e $\star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$.
 - (b) Mostre, usando as coordenadas do item anterior, que dados um campo escalar f e um campo vetorial \vec{A} em \mathbb{R}^3 , temos $\nabla f = (df)^\#$, $\nabla \times \vec{A} = (\star(d\vec{A}^b))^\#$ e $\nabla \cdot \vec{A} = (d(\star(\vec{A}^b)))^\#$. Finalmente, observe que os lados direitos dessas expressões não dependem do sistema de coordenadas usado e assim dão expressões para o gradiente, rotacional e divergente que valem em coordenadas arbitrárias.
 - (c) Calcule o elemento de volume e a ação do operador estrela de Hodge ainda em $M = \mathbb{R}^3$ mas agora em coordenadas esféricas.
 - (d) Usando os itens anteriores, obtenha expressões para o gradiente, rotacional e divergente em coordenadas esféricas.
5. (*) Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M e N com $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$. Sejam $\{x^1, \dots, x^m\}$ e $\{y^1, \dots, y^n\}$ coordenadas locais em M e N em torno dos pontos $p \in M$ e $F(p) \in N$. Mostre que:

- (a) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$, onde $\omega, \eta \in \Omega(N)$;
- (b) $F^*(\omega_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$;
- (c) Se $m = n$, então $F^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_n}) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ (note que $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ é a matriz jacobiana de F nas coordenadas acima).

6. (*) Seja M uma variedade n -dimensional com coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Seja $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ uma n -forma em M . Definamos

$$\int_V \omega = \int \dots \int_R f dx^1 \dots dx^n,$$

onde o lado direito é a integral múltipla usual de cálculo e V é uma região bem comportada de M mapeada em $R \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que essa definição independe do sistema de coordenadas.

7. (*) Seja N uma subvariedade p -dimensional da variedade do exercício anterior, $p \leq n$, com coordenadas (u^1, \dots, u^p) . Seja $\eta = \eta_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$ uma p -forma em N .¹ Dada uma região bem comportada S em N definamos

$$\int_S \eta = \int_S \eta_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p},$$

onde cada termo da soma do lado direito é definido no exercício anterior. Se $\sigma : R \subset \mathbb{R}^p \rightarrow N$ é uma parametrização de $N \subset M$, mostre que

$$\int_S \eta = \int_R \sigma^* \eta.$$

8. (*) Sabemos que toda forma exata é fechada, já que $d^2 = 0$. Reciprocamente, seja ω uma p -forma fechada definida em uma bola aberta de \mathbb{R}^n . Mostre que é possível encontrar uma $(p-1)$ -forma η tal que $\omega = d\eta$ (isto é, ω neste caso é exata). Esse resultado vale se retirarmos a hipótese de que ω é bem definida na bola aberta inteira?

¹Tal η pode ser pensada como uma forma $\bar{\eta}$ de M restrita a N por $\eta = i^* \bar{\eta}$, onde $i : N \rightarrow M$ é a inclusão de N em M .