Lista 5 - Mecânica Clássica

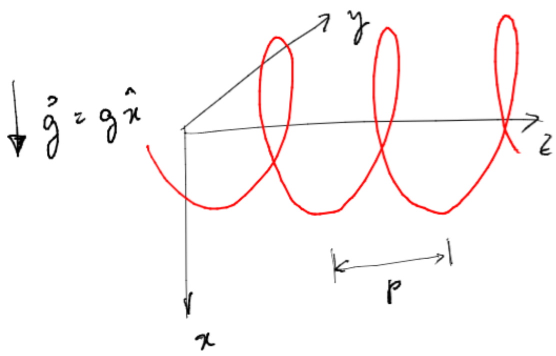
Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2021

1. Uma conta de massa m se move sem atrito em um arame em forma de hélice com eixo de simetria na horizontal, sem massa, e sujeita a um campo gravitacional uniforme com aceleração vertical g. A hélice tem diâmetro d e passo p (veja figura abaixo).

   (a) Escreva a lagrangiana do sistema e ache suas equações de movimento.

   (b) Ache a hamiltoniana do sistema e a compare com a energia total. Ela é conservada?

   (c) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e os classifique (estável/instável). Determine a frequência para pequenas oscilações perto dos pontos de equilíbrio estáveis.



$$\begin{cases} x = \frac{d}{2}\cos\phi \\ y = \frac{d}{2}\sin\phi \\ z = \frac{\phi}{2\pi}p \end{cases}$$

2. Considere um sistema análogo ao do exercício anterior, mas agora suponha que o corpo possua uma carga elétrica q e que exista um campo elétrico constante E orientado paralelamente ao eixo de simetria da hélice.

   (a) Repita o exercício anterior para este caso, discutindo os casos de campo fraco e forte (calcule a frequência de pequenas oscilações apenas no regime de campo fraco).

   (b) Resolva explicitamente as equações de movimento com as condições iniciais em que a partícula parte do repouso em um dos pontos mais baixos da hélice. Interprete fisicamente.

   (c) O que muda se ao invés de o corpo possuir carga elétrica, a hélice como um todo for submetida (por um agente externo qualquer) a uma aceleração constante a orientada paralelamente a seu eixo de simetria?

3. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas M e m. Suponha que $M \gg m$, de forma que M possa ser considerado fixo no centro de massa. Escolha um sistema de coordenadas $\vec{q} = (q^1, q^2)$ com centro em M e que gira com frequência angular Ω no plano xy da órbita de m. Mostre que a lagrangiana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{q}} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{q}\right)\right]^2 + \frac{GMm}{q},$$

onde $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Obtenha a Hamiltoniana correspondente. (Exercício tirado das notas do Marcus Aguiar).

4. Considere uma uma partícula com carga q e massa m sob a ação da força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

(a) Obtenha a lagrangiana abaixo para este sistema em termos dos potenciais eletromagnéticos ϕ e $\vec{A}$:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}.$$

(b) Mostre que a hamiltoniana correspondente é dada por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi.$$