

Lista 4 - Mecânica Clássica

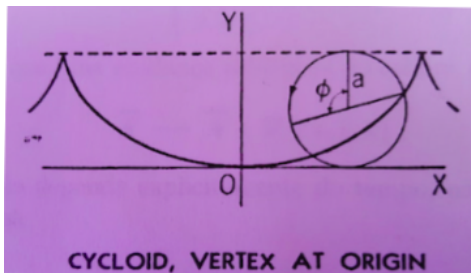
Ricardo Antonio Mosna, setembro de 2021

1. Considere a lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ de um sistema mecânico. Mostre que

$$L' = L + \frac{dF(\vec{q}, t)}{dt}$$

define o mesmo sistema físico (isto é, que uma trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange para L se, e somente se, satisfaz para L').

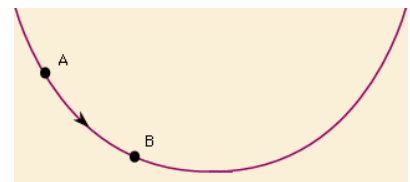
2. Uma conta de massa m escorrega por um fio sem atrito. A curva do fio tem a forma de uma cicloide, como mostra a figura abaixo.



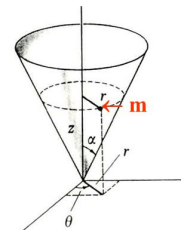
$$\begin{cases} x = a(\phi + \sin \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

com $-\pi < \phi < \pi$

- (a) Considere o sistema sob a ação da gravidade (na direção de $-\hat{y}$). Encontre a lagrangiana e escreva as equações de movimento (considere o zero do potencial no vértice da cicloide).
- (b) O movimento da coordenada ϕ é oscilatório. Encontre o período correspondente. Dica: utilize a integral da energia (quadratura).
- (c) Mostre que a variável $\eta = \sin \phi/2$ realiza movimento harmônico simples e integre a equação de movimento.
- (d) Seu resultado está de acordo com a conclusão que segue do exercício 2 a seguir?
3. Uma partícula de massa m desliza sem atrito sobre uma rampa e sob a ação da gravidade, como na figura ao lado. Deduza a forma da curva que faz com que o período de oscilação independa da energia.

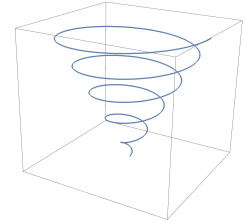


4. Considere uma partícula de massa m se movendo sobre um cone, sem atrito e sob a ação da gravidade, como mostra a figura ao lado. O cone tem ângulo de abertura 2α , eixo de simetria z e vértice na origem. Sejam r e θ dados pelas coordenadas cilíndricas usuais.



- (a) Ache as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$.
- (b) Mostre que existem soluções onde $r(t) = r_0$, r_0 constante. Qual é a frequência ω correspondente neste caso?
- (c) Esta órbita é estável? Se sim, qual é a frequência Ω para pequenas oscilações em torno do raio r_0 ?
- (d) Sob que condições temos $\Omega = \omega$?

5. Considere uma partícula de massa m se movendo sem atrito e sob a ação da gravidade em uma espiral cônica, como mostra a figura ao lado. O cone que contém a espiral tem ângulo de abertura 2α , eixo de simetria z e vértice na origem.



- (a) Encontre as equações de movimento da partícula se a espiral roda em torno do eixo de simetria com velocidade angular constante ω .
 - (b) Para qual valor de ω a partícula permanece sempre em uma mesma altura z_0 ?
6. Considere uma partícula de referência de massa m caindo do repouso de uma altura R sob a ação da força de Kepler. Agora considere um haltere formado por duas partículas, de massa $m/2$ cada, presas entre si por uma barra sem massa de comprimento l .

- (a) Deixe esse haltere cair do repouso com altura inicial de seu centro de massa sendo também R (veja a figura abaixo à esquerda). Quem cai mais rápido, o haltere ou a partícula de referência?
- (b) Suponha agora que $l = l(t)$ depende do tempo e que inicialmente o haltere está fechado ($l(0) = 0$), se abre até um tamanho final L , e então novamente se fecha, levando para completar esse ciclo um tempo T . Assim, tanto em $t = 0$ quanto em $t = T$ o haltere é nada mais que uma partícula de massa total m (veja a figura abaixo à direita). Quem cai mais rápido, a partícula que se dividiu e se juntou ou a partícula de referência?



Exercício Extra:

Nosso objetivo aqui é resolver quantitativamente o exercício anterior, calculando a diferença entre as alturas do haltere oscilante e da partícula de referência ao final de um ciclo. Trabalhando sempre na ordem mais baixa possível de L e T que capture o efeito acima, mostre que

$$\delta r \approx -K \frac{L^2 T^2}{R^4},$$

onde a constante positiva K depende de G (constante da gravitação universal), M (massa central, que gera o campo) e de uma integral adimensional envolvendo $l(t)$.