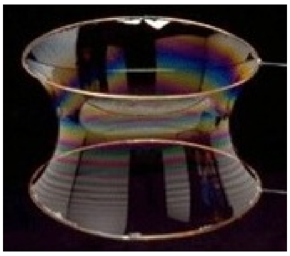
Lista 3 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2021

1. Dadas coordenadas generalizadas $q^1, \ldots, q^k$ no espaço de configurações e as equações de Euler-Lagrange
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, k,$$
onde $F = F(q^1, \ldots, q^k, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^k, t)$, considere a transformação genérica (dependente do tempo)
$$s^i = s^i(q^1, \ldots, q^k, t), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$
Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes por (1), isto é, que
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

2. Ache a curva ligando dois pontos a alturas diferentes de tal forma que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto atinja o ponto mais baixo no menor tempo possível, deslizando pela curva sem atrito e sob a ação da gravidade. Tal curva é a famosa braquistócrona. Informe-se sobre sua história.[1]

3. Se mergulharmos dois anéis de arame em uma solução de água com sabão, qual será a superfície formada pela bolha de sabão resultante? Esse é o chamado problema de Plateau que consiste em achar a superfície mínima que satisfaz dadas condições de contorno. Suponha que os aneis tenham o mesmo eixo de simetria como na figura ao lado e determine tal superfície.



4. Considere a espiral esférica (ou loxodromia) dada pela curva C parametrizada por $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S^2$, onde
$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t)\,\mathrm{sech}(mt), \\ y(t) &= \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sech}(mt), \\ z(t) &= -\tanh(mt), \end{aligned}$$
com $-\infty < t < \infty$ e $m \geq 0$.

   (a) Esboce C.

[1] Veja, por exemplo, `https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve`.

(b) Obtenha a parametrização acima em coordenadas esféricas (isto é, $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$).

(c) Encontre expressões para $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}\mathbb{R}^3$ e na base $\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}S^2$.

(d) Calcule o ângulo que tal curva faz com $\frac{\partial}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial}{\partial \phi}$ para cada t. Interprete. Dica: faça $\frac{m}{1+m^2} = \cos\alpha$.

(e) Calcule o comprimento de tal curva. Interprete.

5. Considere o toro mostrado na figura abaixo (à esquerda):

(a) Parametrize tal superfície usando as coordenadas θ e ϕ da figura.

(b) Obtenha expressões para os vetores $\boldsymbol{e}_i$ da base coordenada correspondente e para o tensor métrico g_{ij}.

(c) Usando o que você obteve no ítem (b) escreva a integral que corresponde ao comprimento da curva dada por $\phi = \phi_0$ que abraça o toro e a calcule. Faça o mesmo para a curva $\theta = \theta_0$.

(d) Escreva a integral que corresponde ao comprimento de uma curva que dá uma volta no toro como na figura da direita (escolha uma).