Lista 2 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2021

1. **O vetor de Runge-Lenz** Considere uma partícula de massa m sob a a ação de uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\hat{e}_r$.

   (a) Mostre que
   $$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{L}\right) = -mf(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right),$$
   onde $\vec{p}$ é o momento linear e $\vec{L}$ o momento angular do corpo.

   (b) Mostre que, para o problema de Kepler (isto é, $f(r) = -k/r^2$), o vetor
   $$\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - mk\,\frac{\vec{r}}{r}$$
   é conservado e fica no plano do movimento. Esse é o chamado *vetor de Runge-Lenz.*

   (c) Usando coordenadas polares (r,θ) no plano do movimento do corpo, mostre que
   $$Ar\cos\theta = L^2 - mkr.$$

   (d) Segue que
   $$r = \frac{r_0}{1+e\cos\theta},$$
   onde $r_0 = \frac{L^2}{mk}$ e $e = \frac{A}{mk}$. Interprete detalhadamente.

2. Mostre que, em termos de coordenadas relativas ao centro de massa $\vec{R}$,
   $$\vec{r}_i{}' := \vec{r}_i - \vec{R},$$
   temos, para $M = \sum_i m_i$ e $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$:

   (a) $\sum_i m_i\vec{r}_i{}' = \vec{0}$;

   (b) $T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i{}'^2$;

   (c) $\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} + \sum_i \vec{r}_i{}'\times m_i\dot{\vec{r}}_i{}'$.

   Interprete detalhadamente.

3. Considere um sistema de duas partículas satisfazendo a terceira lei de Newton na forma forte. Mostre que tal sistema, quando expresso em termos de coordenadas relativas ao centro de massa, é equivalente a um sistema de uma partícula sob a ação de um potencial central. Qual é a massa efetiva neste caso? Re-interprete o problema de Kepler como um problema de dois corpos.

4. Suponha que as forças de interação em um sistema fechado de n partículas são todas da forma

$$\vec{F}_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\, \vec{e}_{ij},$$

onde $\vec{e}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$. Mostre que tal sistema é conservativo. Dica: fazendo $V_{op}(\vec{r}) = -\int f(r)dr$, $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{i \neq j} V_{op}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$.

5. Considere um planeta X com raio R_{X} e massa m_{X}. Suponha que $R_{\mathrm{X}} = \alpha\, R_{\mathrm{Terra}}$ e $m_{\mathrm{X}} = \beta\, m_{\mathrm{Terra}}$. Denotando por g e v a aceleração da gravidade e a velocidade de escape em X, determine $\frac{g_{\mathrm{X}}}{g_{\mathrm{Terra}}}$ e $\frac{v_{\mathrm{X}}}{v_{\mathrm{Terra}}}$.

Exercício extra: O teorema de Bertrand.

Considere uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r)$. O objetivo deste problema é mostrar o teorema de Bertrand: "os únicos potenciais centrais com a propriedade de que todas as órbitas limitadas são fechadas são o potencial de Kepler e o do oscilador harmônico."

(a) Mostre que um potencial central $V(r)$ tem uma órbita circular em $r = R$ se $V'(R) = \frac{l^2}{mR^3}$.

Mostre que esta órbita é estável se

$$V''(R) + \frac{3}{R} V'(R) > 0 .$$

(b) Em uma órbita limitada não circular a partícula se encontra confinada na região $r_{min} \leq r \leq r_{máx}$. Os pontos em que r atinge um extremo são chamados apsides. A separação angular entre duas apsides consecutivas é denominada ângulo apsidal $\Delta\varphi$ (por exemplo, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ para uma órbita elíptica).

Mostre que o ângulo apsidal para órbitas quase-circulares é

$$\Delta\psi = \pi\sqrt{\frac{V'(R)}{3V'(R) + RV''(R)}},$$

onde R é o raio da órbita circular.

(c) Mostre que os únicos potenciais centrais para os quais $\Delta\psi$ é independente de R em (b) são da forma $V(r) = a r^{\alpha}$ ($\alpha > -2$ e $\alpha \neq 0$) e $V(r) = b\ln(r)$.

(d) Para os potenciais do ítem (c), mostre que $\Delta\psi = \frac{\pi}{\sqrt{2+\alpha}}$ onde $\alpha = 0$ corresponde ao caso logarítmico.

(e) Para os casos em que $V(r) = a r^{\alpha}$ com $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$, i.e., para $\alpha > 0$ (com $a > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que $\lim_{E\to\infty} \Delta\psi = \frac{\pi}{2}$.

(f) Para os casos em que $V(r) = -k r^{-\beta}$ com $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, i.e., $0 < \beta < 2$ (com $k > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que

$$\lim_{E\to 0^-} \Delta\psi = \frac{\pi}{2-\beta}$$

(g) Usando os itens anteriores, mostre o teorema de Bertrand.