MS520

(2016)

Lista 5

(entrega em 02/12)

1. Dada $f = f(q, p, t)$ mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = -\{p_i, f\}, \quad \frac{\partial f}{\partial p^i} = \{q_i, f\}$$

Interprete tais resultados de acordo com a discussão, vista em aula, de que q^i e p_i são geradores de translação em p_i e q^i.

2. Considere o momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ i.e., } L_k = \varepsilon_{ijk} x_i p_j .$$

Mostre que

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

que, como vimos, são as relações de comutação de $so(3)$.

3. Considere um hamiltoniano proveniente de uma força central,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^{\,2} + V(r), \qquad (*)$$

$r = \|\vec{r}\|$.

(a) Mostre que

$$\{L_i, H\} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

(b) Explique por que (a) segue de apenas $\{L_1, H\} = 0$ e $\{L_2, H\} = 0$.

(c) No contexto do teorema de Noether (versão hamiltoniana), qual é a simetria gerada pela quantidade conservada L_3? Aqui você deve fazer o cálculo explícito de $\vec{X}_{L_3}$ e então achar suas curvas integrais. Dica: coordenadas cilíndricas.

(d) Estenda seu resultado em (c) para um $\vec{l} = a^i L_i$ geral, onde $\hat{a}$ é um vetor constante.

4. Mostre que a evolução temporal em um sistema hamiltoniano é uma transformação canônica.

5. <u>Vetor de Runge-Lenz novamente:</u>

Vimos (muitas vezes) que o vetor de Runge-Lenz,

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r},$$

é conservado no problema de Kepler, em que

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} - \frac{k}{r}. \qquad (**)$$

(a) Chegue a esta mesma conclusão novamente, mostrando agora que $\{\vec{A}, H\} = 0$. Desta forma, temos 6 quantidades conservadas aqui, L_a e A_a, $a = 1, 2, 3$.

(b) Vamos ver que isso faz com que o grupo de simetrias do problema de Kepler $(**)$ seja maior que o de $(*)$. Vimos que as quantidades conservadas sempre fecham uma álgebra. Vamos calculá-la aqui. Mostre que:

- $\{L_a, A_b\} = \varepsilon_{abc} A_c$

- $\{A_a, A_b\} = K\, \varepsilon_{abc} L_c$

onde K é constante positiva para o caso ligado $(E < 0)$.

(c) Assim, a álgebra de Lie gerada por essas seis constantes de movimento é para o caso ligado (após renormalizar A):

$$\{L_a, L_b\} = \varepsilon_{abc} L_c$$

$$\{L_a, A_b\} = \varepsilon_{abc} A_c$$

$$\{A_a, A_b\} = \varepsilon_{abc} L_c$$

Que álgebra, vista em aula, é essa?

<u>Obs.</u>: Desta forma, o problema de Kepler tem uma "simetria escondida" que faz com que o usual $so(3)$ de (*) seja aumentado para um $so(4)$, ainda que o problema "viva" em $\mathbb{R}^3$!