MS520

(2016)

Lista 4

(entrega em 18/11)

1. Seja G o subconjunto das matrizes M reais $2n \times 2n$ que satisfazem

$$M^t J M = J$$

onde $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right)$. Mostre que:

(a) Dado $M \in G$, $\det M = \pm 1$, $M^{-1} = -J M^t J$ e $M J M^t = J$.

(b) G é um grupo (chamado grupo simplético)

2. Considere um oscilador harmônico 1D,

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 .$$

Seja $S_{cl} = S_{cl}(q_1, q_2, t_1, t_2)$ a ação calculada no caminho clássico que começa em $x = q_1$, $t = t_1$ e termina em $x = q_2$, $t = t_2$.

(a) Mostre que

$$S_{cl}(q_1, q_2, t_1, t_1+\tau) = \frac{m\omega}{2\,\mathrm{sen}(\omega\tau)}\left[(q_1^2 + q_2^2)\cos\omega\tau - 2q_1q_2\right]$$

(b) Note que

$$\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial q_1 \partial q_2}\right| \to \infty$$

nos pontos focais, isto é, para $\tau = n \cdot \frac{\text{período}}{2} = \frac{n\pi}{\omega}$

(c) Verifique, para este caso, as relações

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial S_{cl}}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial S_{cl}}{\partial t_1} = H(t_1), \quad \frac{\partial S_{cl}}{\partial t_2} = -H(t_2)$$

3. Exiba explicitamente, para o oscilador harmônico, uma trajetória clássica que não é um mínimo da ação. (Espera-se que você escreva explicitamente a solução clássica γ_c e uma perturbação finita γ_p dela, que passe pelos mesmos ponto inicial e final, e ~~tal~~ que $S[\gamma_p] < S[\gamma_c]$. Fique à vontade para usar recursos computacionais.

4. Uma conta de massa m se move sem atrito em um arame em forma de hélice com eixo de simetria na horizontal, sem massa, e sujeita a um campo gravitacional uniforme com aceleração vertical g. A hélice tem diâmetro d e passo p.

   (a) (~~1 ponto~~) Escreva a lagrangiana do sistema e ache suas equações de movimento.

   (b) (~~1 ponto~~) Ache a hamiltoniana do sistema e a compare com a energia total. Ela é conservada?

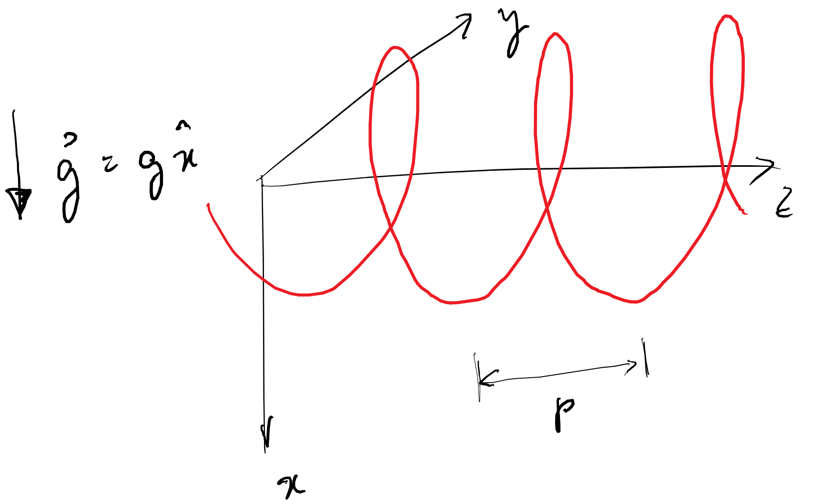
   (c) (~~1 ponto~~) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e os classifique (estável/instável). Determine a frequência para pequenas oscilações perto dos pontos de equilíbrio estáveis.

5. (~~4 pontos~~) Suponha agora que o corpo possua uma carga elétrica q e que exista um campo elétrico constante E orientado paralelamente ao eixo de simetria da hélice.

   (a) (~~2 pontos~~) Repita o exercício anterior para este caso, discutindo os casos de campo fraco e forte (calcule a frequência de pequenas oscilações apenas no regime de campo fraco).

   (b) (~~2 pontos~~) Resolva explicitamente as equações de movimento com as condições iniciais em que a partícula parte do repouso em um dos pontos mais baixos da hélice. Interprete fisicamente.

   (c) (~~1 ponto~~) O que muda se ao invés de o corpo possuir carga elétrica, a hélice como um todo for submetida (por um agente externo qualquer) a uma aceleração constante a orientada paralelamente a seu eixo de simetria?



$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{2}\cos\phi \\ y = \dfrac{d}{2}\sin\phi \\ z = \dfrac{\phi}{2\pi}\,p \end{cases}$$