MS520

(2016)

Lista 3

(entrega em 1/11)

1. Considere novamente a lagrangeana para o problema de Kepler,

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{k}{r}.$$

Considere a transformação dada por

$$\vec{r} \to \vec{r}_s = \vec{r} + s\,\delta\vec{r},$$

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{k}\left[2(\vec{r}\cdot\hat{n})\dot{\vec{r}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\hat{n} - (\dot{\vec{r}}\cdot\hat{n})\vec{r}\right]$$

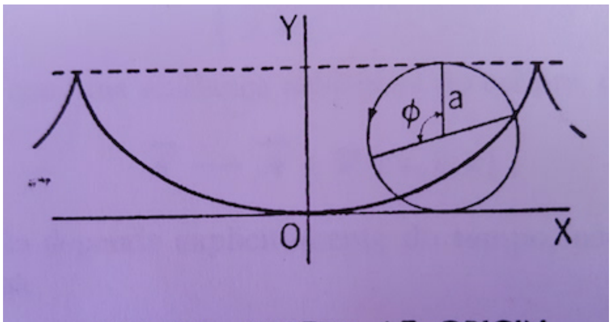
onde $\hat{n}$ é um versor fixo em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que tal transformação é uma simetria do sistema, com

$$\delta_s L = \frac{dl}{dt}, \quad l = -2\,\hat{r}\cdot\hat{n}$$

(b) Mostre que a constante de movimento resultante do teorema de Noether é, neste caso, a componente do vetor de Runge-Lenz na direção de $\hat{n}$, i.e., $\vec{A}\cdot\hat{n}$.

2. Uma conta de massa m escorrega por um fio sem atrito. A curva do fio tem a forma de uma ciclóide:



CYCLOID, VERTEX AT ORIGIN

$$\begin{cases} x = a(\phi + \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

com $-\pi < \phi < \pi$

(a) Considere o sistema sob a ação da gravidade (na direção de $-\hat{y}$). Encontre a Lagrangeana e escreva as equações de movimento. (Considere o zero do potencial no vértice da ciclóide)

(b) O movimento da coordenada ϕ é oscilatório. Encontre o período correspondente. Dica: utilize a integral da energia (quadratura).

(c) Mostre que a variável $\eta = \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)$ realiza MHS e integre a eq. de movimento.

3. Seja M uma variedade de dimensão n e sejam $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^q(M)$. Mostre que

(a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\, \eta \wedge \omega$

(b) $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p\, \omega \wedge d\eta$.

4. Seja $F: M \to N$ aplicação diferenciável entre as variedades M e N, com $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$. Sejam $\{x^1, \dots, x^m\}$ e $\{y^1, \dots, y^n\}$ coordenadas locais em M e N, em torno dos pontos $p \in M$ e $F(p) \in N$ respectivamente. Mostre que

(a) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$, $\omega, \eta \in \Omega(N)$

(b) $F^*(\omega_{i_1 \dots i_p} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}) =$

$= (\omega_{i_1 \dots i_p} \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_p} \circ F)$

(c) Se $m = n$,

$$F(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

(Note que $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ é a matriz Jacobiana de F nas coordenadas acima).