Lista 9 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, dezembro de 2020

1. Seja G o subconjunto das matrizes $2n \times 2n$ reais M que satisfazem

$$M^t J M = J,$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ e I_n é a matriz identidade $n \times n$.

   (a) Mostre que se $M \in G$ então $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = -JM^tJ$ e $MJM^t = J$.[1]

   (b) Mostre que G é um grupo (o chamado grupo simplético).

   (c) Determine a álgebra de Lie de G.

2. Seja g o produto interno em $\mathbb{R}^n$ definido por $g(x, y) = x^t \eta y$, com $\eta = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$.

   (a) Mostre que suas isometrias são dadas por $G = \{M$ matrizes $n \times n$ reais: $M^t \eta M = \eta\}$.

   (b) Mostre que se $M \in G$ então $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = \eta M^t \eta$ e $M \eta M^t = \eta$.

   (c) Mostre que G é um grupo.

   (d) Determine a álgebra de Lie de G.

3. Considere $\mathfrak{so}(3)$ com seus geradores usuais dados por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostre que $(J_k)_{ab} = -\epsilon_{kab}$.

   (b) Mostre que $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$.

4. Considere $\mathfrak{so}(4)$ com seus geradores usuais dados por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[1] Pode-se mostrar mais que isso: $\det(M) = +1$.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$