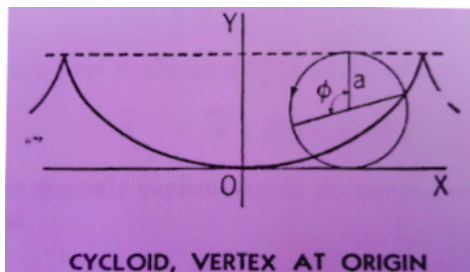
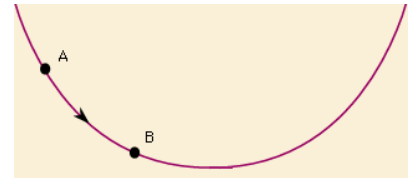


Lista 4 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2020

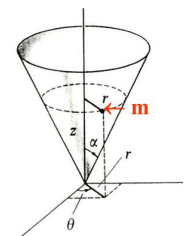
1. Ache a curva ligando dois pontos a alturas diferentes de tal forma que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto atinja o ponto mais baixo no menor tempo possível, deslizando pela curva sem atrito e sob a ação da gravidade. Tal curva é a famosa braquistócrona. Informe-se sobre sua história.¹
2. Uma partícula de massa m desliza sem atrito sobre uma rampa e sob a ação da gravidade, como na figura ao lado. Deduza a forma da curva que faz com que o período de oscilação independa da energia.
3. Uma conta de massa m escorrega por um fio sem atrito. A curva do fio tem a forma de uma cicloide, como mostra a figura abaixo.



$$\begin{cases} x = a(\phi + \sin \phi) \\ y = a(1 - \cos \phi) \end{cases}$$

com $-\pi < \phi < \pi$

- (a) Considere o sistema sob a ação da gravidade (na direção de $-\hat{y}$). Encontre a lagrangiana e escreva as equações de movimento (considere o zero do potencial no vértice da cicloide).
 - (b) O movimento da coordenada ϕ é oscilatório. Encontre o período correspondente. Dica: utilize a integral da energia (quadratura).
 - (c) Mostre que a variável $\eta = \sin \phi/2$ realiza movimento harmônico simples e integre a equação de movimento.
 - (d) Interprete seu resultado levando em conta o exercício anterior.
4. Considere uma partícula de massa m se movendo sobre um cone, sem atrito e sob a ação da gravidade, como mostra a figura abaixo. O cone tem ângulo de abertura 2α , eixo de simetria z e vértice na origem. Sejam r e θ dados pelas coordenadas cilíndricas usuais.



¹Veja, por exemplo, https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve.

- (a) Ache as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$.
- (b) Mostre que existem soluções onde $r(t) = r_0$, r_0 constante. Qual é a frequência ω correspondente neste caso?
- (c) Esta órbita é estável? Se sim, qual é a frequência Ω para pequenas oscilações em torno do raio r_0 ?
- (d) Sob que condições temos $\Omega = \omega$?