Lista sobre exponencial e logaritmo

Exercício 1. Encontre $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dy}{dt}$.

1- $y = (x+1)^x$ 2- $y = (\operatorname{sen} x)^x$ 3- $y = t^{\sqrt{t}}$

4- $y = (\log x)^{\log x}$.

~~Encontre~~ **Exercício 2.** Encontre a derivada de y com relação à variável independente usando o procedimento conhecido como diferenciação logarítmica.

1- $y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$ 2- $y = \operatorname{tg}\theta \sqrt{2\theta+1}$

3- $y = \frac{\theta+5}{\theta\cos\theta}$ 4- $y = \frac{\theta \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

5- $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$ 6- $y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

Exercício 3. Se $y = A\operatorname{sen}(\log x) + B\cos(\log x)$, onde A e B são constantes, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$x^2 . y'' + x y' + y = 0 .$$

Exercício 4. Usando indução, mostre que

$$\frac{d^n(\log x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n} .$$

Exercício 5. Calcule as integrais abaixo usando a substituição sugerida

1 - $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\,dx$, $u = 2x^2$;

2 - $\int 2x\,(x^2+5)^{-4}\,dx$, $u = x^2+5$;

3 - $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\,dx$, $u = 3x^2+4x$;

4 - $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}\,dx$, $u = 1+\sqrt{x}$;

5 - $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy$, $u = y^4+4y^2+1$;

6 - $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$, $u = -\frac{1}{x}$

7 - $\int (\operatorname{cossec}^2 2\theta)(\operatorname{cotg} 2\theta)\,d\theta$, a) $u = \operatorname{cotg} 2\theta$, b) $u = \operatorname{cossec} 2\theta$;

8 - $\int \frac{1}{\sqrt{5x+8}}\,dx$ a) $u = 5x+8$, b) $u = \sqrt{5x+8}$.

Exercício 6. Calcule as integrais abaixo.

1. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

2 - $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

3 - $\int \theta\,\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

4 - $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

5 - $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$

6 - $\int \operatorname{sen}^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx$

7 - $\int \operatorname{tg}^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

8 - $\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\,dx$

9 - $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}} \sec^2\left(e^{\sqrt{x}}+1\right) dx$ 10 - $\displaystyle\int \frac{\sec z \, tg\, z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$

11 - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sec\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) tg\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) dx$

12 - $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, dx$ 13 - $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\, dx$

14 - $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\, dx$ 15 - $\displaystyle\int (x+5)(x-5)^{\frac{1}{3}}\, dx$

16 - $\displaystyle\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\, dx$ 17 - $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^3}\, dx$

18 - $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2\theta \; e^{\operatorname{sen}^2\theta}\, dx$ 19 - $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\, dx$

20 - $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^z}\, dz$ 21 - $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\, dx$

22 - $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Exercício 7. Calcule as integrais abaixo usando a sequência de substituições abaixo.

1 - $\displaystyle\int \frac{18\, tg^2 x \sec^2 x}{(2+tg^3 x)^2}\, dx$

a - $u = tg\, x$ seguida de $v = u^3$ e então $w = 2+v$

b - $u = tg^3 x$ seguida de $v = 2+u$

c - $u = 2 + tg^3 x$

2 - $\int \sqrt{1+\text{sen}^2(x-1)}\,.\,\text{sen}(x-1)\,.\,\cos(x-1)\,dx$

a - $u = x-1$, seguida de $v = \text{sen}\,u$ e depois $w = 1+v^2$;

b - $u = \text{sen}(x-1)$ seguida de $v = 1+u^2$;

c - $u = 1+\text{sen}^2(x-1)$.

Exercício 8. Calcule $\displaystyle\int \frac{(2r-1)\,.\,\cos\left(\sqrt{3(2r-1)^2+6}\right)}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

Exercício 9. Usando substituição, mostre que, para quaisquer números positivos x e y, temos

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{y} \frac{1}{t}\,dt$$

Exercício 10. Calcule:

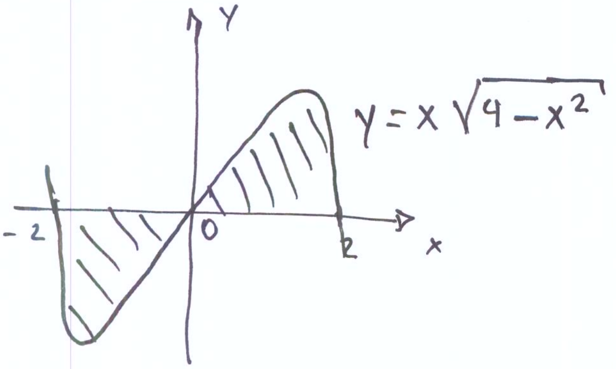
1- $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

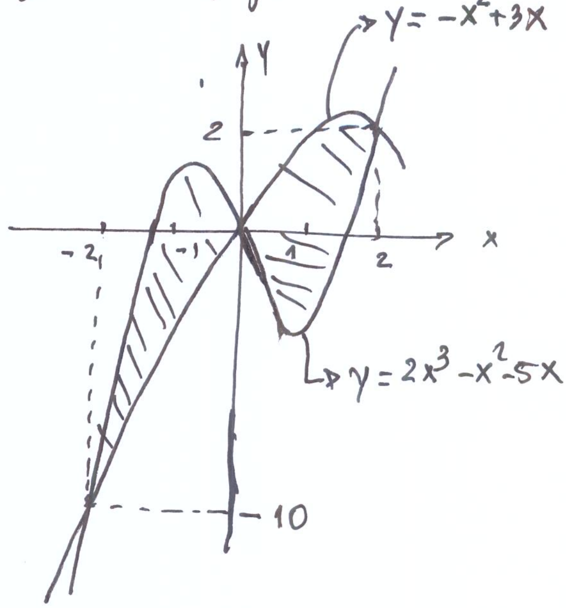
2 - $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x\log x}\,dx$

3 - $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4}{t(1+\log^2 t)}\,dt$

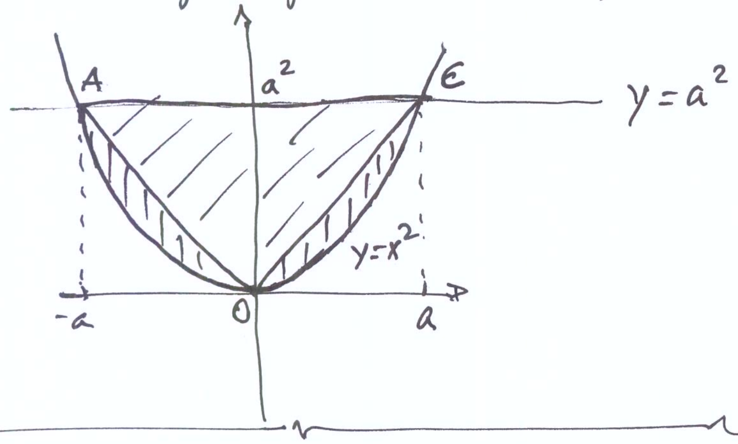
4 - $\displaystyle\int_0^{\pi/12} 6\,\text{tg}\,3x\,dx$

Exercício 11. Calcule a área da região na figura.





Exercício 12. A figura mostra um triângulo AOC inscrito na região que está entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = a^2$. Encontre o limite do quociente entre a área do triângulo e a área da região parabólica quando a tende à zero.

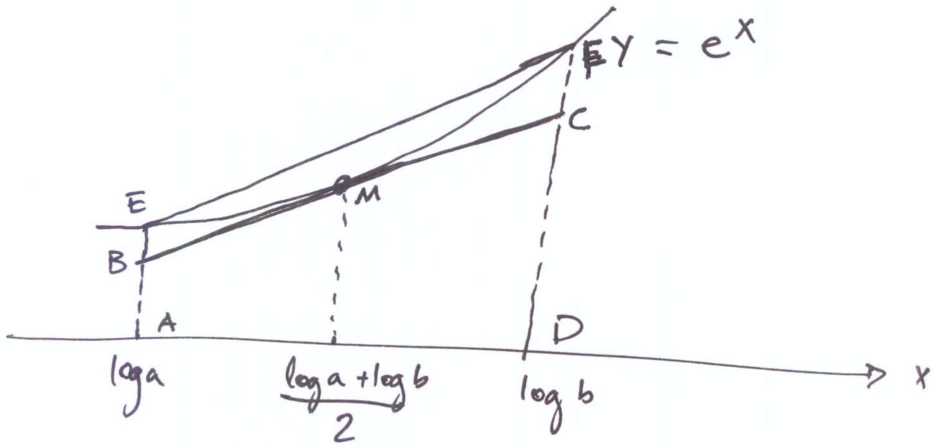


Exercício 13.

a) Mostre que, se $0 < a < b$, então

$$e^{(\log a + \log b)/2}(\log b - \log a) < \int_{\log a}^{\log b} e^x \, dx < \frac{e^{\log a} + e^{\log b}}{2}(\log b - \log a).$$

(veja a figura logo à seguir).



b) Use a desigualdade em a) para mostrar que

$$\sqrt{a.b} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2},$$

ou seja, a <u>média</u> <u>logaritmica</u> de dois números positivos é sempre menor que a média aritmética e maior que a média geométrica.

Se estiver curioso, veja:

- Frank Burk, "The geometric, logarithmic and arithmetic mean inequality". American Mathematical Monthly, vol. 94, nº 6, 1987, pág. 527-528.