6ª lista de exercícios - Livro do SPIVAK

1 - Encontre a derivada de cada uma das funções abaixo:

a) F^{-1}, onde $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$;

b) F^{-1}, onde $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

(Encontre $(F^{-1})'(x)$ em termos de $F^{-1}(x)$)

---

2 - Mostre que o valor das expressões abaixo não dependem de x.

a) $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$;

b) $\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $x \in (0, \pi/2)$.

---

3 - Uma função f é periódica com período T se,

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que, se f é periódica com período T e integrável em $[0, T]$, então

$$\int_0^a f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt, \quad \forall b.$$

Sugestão: substituição de variáveis.

4. Mostre que se h é contínua e f e g são diferenciáveis,
então a função

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$$

satisfaz

$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x).$$

TEORIA ADICIONAL e mais exercícios.

<u>Definição</u>. Para uma função integrável em um intervalo $[a,b]$ definimos o valor médio, ou a média, como sendo

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (av \rightsquigarrow \text{average}$$

<u>Exemplo</u>. Se $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$, então

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \text{área do semi-círculo de raio } 2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \pi (2)^2 = 2\pi.$$

Assim,

$$av(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Teorema do Valor médio para integrais:

Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstração.

Sendo f contínua em $[a,b]$, temos que existem os valores $\min f$ e $\max f$. Além disso,

$$(\min f)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (\max f)(b-a).$$

Dividindo por $(b-a)$:

$$\min f \leq av(f) \leq \max f.$$

A continuidade de f implica que esta função assume todos os valores entre $\min f$ e $\max f$. Assim, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = av(f).$$ $\square$

~~Exercício 1. Diga se as afirmações abaixo~~

Exercício 1. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) $\int_a^b av(f)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

b) $av(f+g) = av(f) + av(g)$;

c) $av(k \cdot f) = k \cdot av(f)$, onde k é uma constante;

d) $av(f) \leq av(g)$ se $f(x) \leq g(x)$ em $[a,b]$.

Notação e nomenclatura.

- Uma função F tal que $F' = f$ é chamada de primitiva de f.
- O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que uma função contínua sempre possui uma primitiva.
- O símbolo

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{(sem os limites de integração)}$$

significa "uma primitiva de f", ou mais precisamente, "a coleção de todas as primitivas de f".

Exemplo: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$.

É comum porém escrever $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$,

significando que uma primitiva de $f(x) = x^3$ é, precisamente, uma função da forma $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, onde C é uma constante.

Exercício 2. Integre a função $f(x) = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$ de três maneiras:

a) $\int 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x\, dx = \int 2u\,du = u^2 + C_1 = \text{sen}^2 x + C_1$,

onde fizemos a mudança $u = \text{sen}\,x$;

b) $\int 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x\, dx = \int -2u\,du = -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$,

onde fizemos a mudança $u = \cos x$;

c) $\int 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x\, dx = \int \text{sen}\,2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C_3$,

onde usamos que $2\,\text{sen}\,x \cos x = \text{sen}\,2x$.

É possível que as três integrais foram calculadas corretamente? Explique.

Exercício 3 Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}$

mostrando que este limite é

$$\int_0^1 x^5\,dx$$

e calculando esta integral.

Exercício 4. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$

Exercício 5. Seja f uma função contínua. Expresse o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

como uma integral definida.

Exercício 6. Use o exercício 5 para calcular:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(2+4+6+\cdots+2n\right)$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.