Capítulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

Neste primeiro capítulo, esboçamos um resumo de resolução de sistemas lineares, e apresentamos, sempre que possível, argumentos geométricos que ilustrem os exemplos. Nosso objetivo final será a apresentação de um algoritmo conhecido como *escalonamento*, destinado à resolução e análise de sistemas lineares.

Antes de mais nada, vamos relembrar algumas propriedades das matrizes. Por uma matriz real $A_{m\times n}$, de ordem $m \times n$ (lê-se m por n), entenderemos um conjunto de mn valores reais, indexados a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, como no exemplo abaixo :

Exemplo 1

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Os elementos a_{ij} serão ditos entradas ou coeficientes da matriz $A_{m\times n}$.

As operações elementares com matrizes nos serão bastante úteis, donde relembramos a

Definição 1 (Soma de Matrizes) *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$, com coeficientes reais. Definimos a soma $C = A + B$ como sendo a matriz $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 2 (Multiplicação por escalar) *Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ uma matriz com coeficiente reais e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos o produto $B = \alpha A$ como sendo a matriz $B_{m\times n} = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 3

$$\sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

Definição 3 (Produto de Matrizes) *Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times k} = (b_{ij})$ matrizes com coeficientes reais. Então, definimos o produto das matrizes A e B como sendo a matriz $C_{m\times k} = (c_{ij})$ de modo que*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

Exemplo 4

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{4\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 6+2\sqrt{2} \\ 2 & -6-2\sqrt{2} \\ -2 & 4 \\ 2 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{4\times 2}$$

Consideremos agora o seguinte sistema linear :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

Utilizando as definições anteriores, vemos que este sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e, inspirados pela análise deste caso particular, escrevemos, de modo mais geral, a

Definição 4 *Um sistema linear com k equações e n incógnitas $x_1, ..., x_n$ é uma equação matricial da forma*

$$A_{k\times n}X_{n\times 1} = B_{k\times 1},$$

onde $A_{k\times n}$ e $B_{k\times 1}$ são matrizes reais e

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

.

Estamos agora em condições de analisar alguns exemplos de sistemas lineares, e de apresentar justificativas geométricas para este estudo. Assim, considere-se o seguinte sistema linear em duas equações e duas incógnitas :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

Este sistema possui claramente o par $(1, 0)$ como solução, o que pode ser facilmente obtido por substituição direta, ou através da consideração geométrica de que $(1, 0)$ é o ponto de interseção das retas $x + y - 1 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$ (ver figura abaixo).

Figura 1.1: Sistema possível e determinado

Suponha que acrescentássemos mais uma equação ao sistema, digamos, por exemplo,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} .$$

Ainda neste caso, as retas $x + y - 1 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ e $x - y - 1 = 0$ concorrem em um único ponto (naturalmente, o ponto $(1, 0)$), e o sistema continua possuindo uma única solução.

Figura 1.2: Sistema possível e determinado

No entanto, é fácil notar que, escolhendo para a terceira equação uma reta que não passe pelo ponto $(1, 0)$, chegamos a um sistema impossível, uma vez que não haverá interseção

Figura 1.3: Sistema impossível

comum de tais três retas, ou, em outras palavras, não existirá um ponto (x, y) do plano capaz de satisfazer simultâneamente as três equações em questão (ver figura)

Uma rápida inspeção geométrica nos permite analisar todas as possibilidades de solução para um sistema linear em duas incógnitas e duas equações. De fato,

1. se as equações representam, no plano euclidiano, retas concorrentes, a solução do sistema será única (o ponto em que as retas concorrem), e, o sistema, possível e determinado;

2. se as equações representam retas distintas e paralelas, não há ponto de interseção , e, portanto, o sistema não tem solução (impossível);

3. finalmente, se as equações representam retas coincidentes, qualquer ponto destas retas é solução, e portanto, temos infinitas soluções(sistema possível e indeterminado).

Consideremos agora o seguinte sistema linear, em três equações e três incógnitas :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Como o leitor poderá facilmente verificar, a tripla ordenada $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ é a única solução deste sistema. Como interpretá-la geometricamente ? Bem, as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$ representam planos no espaço euclidiano, e, para o exemplo em questão, temos então três planos que se interceptam em um único ponto : $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ (ver figura).

No entanto, diversas outras situacões poderiam ocorrer; por exemplo, dados três planos no espaço, poderíamos ter a interseção comum destes planos em uma reta. Este é o caso exemplificado pelo sistema linear abaixo :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 5y - z = 3 \end{cases}$$

Este sistema é indeterminado, e sua solução é dada por qualquer ponto que esteja sobre a reta $3y + x - 2 = 0$, como pode ser visto na figura abaixo. Você pode encontrar esta solução

Figura 1.4: Sistema possível e determinado

Figura 1.5: Sistema possível e indeterminado

por substituição, mas o método do escalonamento, que estudaremos em breve, se mostrará absolutamente efetivo para realizar tal tarefa. Finalmente, note-se que um sistema em três incógnitas e apenas duas equações nunca poderá ser determinado, uma vez que dois planos não podem se interceptar em um único ponto, mas tão somente, quando for o caso de serem concorrentes, em uma reta. Apenas a título de ilustração, exibimos abaixo um sistema três por três que não possui solução, e também a razão geométrica deste fato (os planos são paralelos).

Figura 1.6: Sistema impossível

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=-3 \end{cases}$$

Procuraremos, agora, analisar sistemas lineares de ordem superior à dos que viemos tratando. Cabe aqui a seguinte questão : como generalizar, para tais casos, a interpretação geométrica que temos apresentado ? A resposta, que tornaremos mais rigorosa futuramente, e que, certamente, será cada vez mais intuitiva para o leitor ao longo de seus estudos, é a de que um sistema linear com k equações e n incógnitas representa a intersecção de k hiperplanos $n-1$ dimensionais em $\mathbb{R}^n$. Ilustremos, calmamente, esta idéia, através de um raciocínio indutivo.

1. Considere duas retas em $\mathbb{R}^2$; temos, deste modo, subespaços 1-dimensionais do plano, que podemos escolher de modo a interceptarem-se em um ponto, i.e., em um subespaço 0-dimensional de $\mathbb{R}^2$.

2. Agora, tome dois planos em $\mathbb{R}^3$; temos, assim, subespaços 2-dimensionais do espaço euclidiano[1] , que podem ser escolhidos de modo a interceptarem-se em uma reta, i.e., em um subespaço 1-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

3. Finalmente, considere o $\mathbb{R}^{4\dagger}$, e, em $\mathbb{R}^4$, dois subespaços 3-dimensionais. Pelos exemplos anteriores, podemos perceber que estes espaços podem ser escolhidos de modo a interceptarem-se em planos, ou seja, em subespaços 2-dimensionais de $\mathbb{R}^4$.

Por uma análise do raciocínio anterior, temos que quatro subespaços lineares 3-dimensionais do $\mathbb{R}^4$ podem ser escolhidos de modo a se interceptarem em um único ponto; para tal, basta que,por exemplo, tais subespaços concorram em planos e que, por sua vez, estes planos concorram em um ponto (veja a figura). Este seria o caso de um sistema quatro por quatro possível e determinado. Note que, mais uma vez, para que um sistema quatro por quatro seja determinado, é necessário que possua ao menos quatro equações, pois três ou menos subespaços de $\mathbb{R}^4$ não podem interceptar-se em um único ponto (para descobrir a razão desta afirmação, siga os passos do exercício ??) . Nos exercício, o leitor irá encontrar situações em que a solução de um sistema em quatro incógnitas seja um espaço tridimensional, um plano, uma reta e, finalmente, um ponto (exemplo já discutido). Estes são exercícios importantes, e você deve procurar fazê-lo, uma vez que, como não dispomos de ferramentas sensitivas para visualizar espaços de dimensões superiores a três, um certo treino é necessário para se compreender as idéias aqui esboçadas.

1.1 Escalonamento, ou o método de Gauss-Siedel

Nesta seção apresentaremos o escalonamento (método de Gauss-Siedel), algoritmo que, conforme prometido, será bastante efetivo para resolução e análise de sistemas lineares. Nosso

[1]Este a que chamamos espaço euclidiano é aquele tridimensional, que o leitor certamente encontrou em seu curso de geometria espacial

[2]este é o espaço euclidiano quadridimensional, ou seja, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; para mais informações, veja capítulo II

principal objetivo é, portanto, apresentar um conjunto de passos para obter as soluções (quando existirem) de uma equação matricial da forma

$$A_{k\times n}X_{n\times 1} = B_{k\times 1} \tag{1.1}$$

onde A e B são matrizes com coeficientes reais e

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Por solução de um sistema linear entendemos o conjunto das matrizes X de coeficientes reais que satisfazem 1.1.

Dado um sistema linear como em 1.1, chamaremos a matriz

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & b_{k1} \end{pmatrix}$$

de *matriz aumentada* do sistema, e, sobre tal matriz, definimos as seguintes operações, chamadas *operações elementares* :

1. e_1 : remanejar a ordem das linhas de S;
2. e_2 : multiplicar uma linha de S por um real $\lambda \neq 0$;
3. e_3 : trocar a r-ésima linha de S pela r-ésima linha mais λ vezes a s-ésima linha, $\lambda \in \mathbb{R} - 0$, $r \neq s$.

Uma matriz obtida de S através de um número finito de operações elementares será dita *linha-equivalente* à S Mostraremos agora que realizar sobre S qualquer das operações descritas acima não altera a solução do sistema 1.1.

Teorema 1 *Sejam S e S' matrizes aumentadas de sistemas lineares dados. Se S e S' são linha-equivalentes, então os sistemas lineares em questão possuem a mesma solução.*

A demonstração do teorema é imediata, e fica será deixada como exercício para o leitor.

Uma vez que transformações elementares não alteram o conjunto de soluções de um sistema linear, vamos utilizá-las para resolver tais sistemas. Sistematizamos o processo como se segue.

1. Dado um sistema linear como em 1.1, montamos a matriz aumentada do sistema :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & b_{k1} \end{pmatrix}$$

2. Tomamos o primeiro i tal que a entrada a_{i1} seja diferente de zero, e realizamos, através da operação elementar e_1, a permutação da primeira e da i-ésima linhas.

3. Através da operação e_2, multiplicamos a primeira linha[2] por $\frac{1}{a_{11}}$

4. Através da operação e_3, tornamos zero todas as entradas da primeira coluna, bastando, para tal, somar a i-ésima linha com $-a_{i1}$ vezes a primeira linha. Após este passo, devemos estar com uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{b_{11}}{a_{11}} \\ 0 & -a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} + a_{22} & \cdots & -a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} + b_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_{k1}\frac{a_{12}}{a_{11}} + a_{k2} & \cdots & -a_{k1}\frac{a_{12}}{a_{11}} + b_{k1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & b_{11}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & b_{21}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k2}^{(1)} & \cdots & b_{k1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

5. Determinamos o menor $i \geq 2$ tal que $a_{i2} \neq 0$, e, através da operação e_1, realizamos o permutação das segunda e i-ésima linhas.

6. Através de e_2, multiplicamos a segunda linha[2] por $\frac{1}{a_{22}^{(1)}}$.

7. Como no item 3, utilizamos e_3 para tornar zero as entradas da seegunda coluna abaixo de $a_{22}^{(1)}$, ontendo uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_{11}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_{21}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_{31}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{k3}^{(2)} & \cdots & a_{kn}^{(2)} & b_{k1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

O processo é então repetido para a terceira coluna, e assim sucessivamente, até que tenhamos chegado à última linha. Neste estágio, diremos que a matriz S está escalonado, ou reduzida à forma escada. Resolvamos um exemplo concreto, para fixar as idéias.

Exemplo 5 *Reduzir à forma escada a matriz*

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

[2] após a possível permutação !

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e está terminado nosso trabalho. Ilustraremos agora, em dois casos distintos, a aplicação do escalonamento para a resolução de sistemas lineares.

Exemplo 6 *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 1 \\ 3x - 2y + 4z + 2w = 7 \\ x - y - z + 3w = -2 \end{cases}$$

Inicialmente, construímos a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Escalonando,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

Analisando a matriz aumentada em sua forma escalonada, obtemos, da baixo para cima, a solução procurada :

$$\begin{gathered} -12w = 12 \Rightarrow w = -1; \\ z + 4w = -3 \Rightarrow z - 4 = -3 \Rightarrow z = 1 \\ y - z - 3w = 1 \Rightarrow y - 1 + 3 = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x + y + z + w = 0 \Rightarrow x - 1 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{gathered}$$

$\therefore$ $(1, -1, 1, -1)$ *é a solução do sistema.*

Exemplo 7 *Reduza à forma escalonada o sistema linear abaixo; analise o sistema quanto às suas soluções.*

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x-y+z-w=2 \\ x+y-z+w=3 \end{cases}$$

Matriz aumentada do sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Escalonando,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} z=-1 \\ y+w=-\frac{1}{2} \\ x+y+z+w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ z=-1 \\ y+w=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

O que esta solução representa geometricamente em $\mathbb{R}^4$ *?*

1.2 Exercícios

1. Determinar a e b para que o sistema abaixo seja possível e determinado :

$$\begin{cases} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{cases}$$

2. Determinar o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \end{cases}$$

tenha :

(a) solução única;

(b) nenhuma solução;

(c) mais de uma solução.

3. Resolver, por escalonamento, os seguintes sistemas, expressar as soluções em termos de geradores e interpretar geometricamente os resultados obtidos :

   (a)
   $$\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

4. Dado o sistema
   $$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

   (a) Determine a solução do sistema homogêneo associado.
   (b) Determine a solução do sistema dado.
   (c) Expresse a solução anterior em termos de geradores.

5. Resolva o sistema
   $$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

6. Discuta os seguintes sistemas

   (a)
   $$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 9 \\ 6x + 7z = 13 \\ 4x + 2y + az = b \end{cases}$$

7. Qual é a condição necessária e suficiente para que a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x - 4y = a \\ 6x + ky = b \end{cases}$$

seja um par de números inteiros, quaisquer que sejam a e b inteiros ?

8. Sabendo que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 7 \\ m^2x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$$

admite uma única solução, podemos concluir que m pode assumir todos os valores do intervalo real :

(a) [0,1] (b) [1,2] (c) [2,3] (d) [3,4] (e) [0,4]

9. Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz ampliada de um sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite :

   (a) solução única
   (b) solução com um parâmetro
   (c) solução com dois parâmetros
   (d) nenhuma solução

10. Discuta a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema e encontre um valor de k que o torne impossível.

11. Determine os valores de a, b e c que façam com que o graáfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1,2), (-1,6), (2,3)$.

12. Dados $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax + b$, determine os valore de a, b e c para que f passe pelos pontos $(-1,0), (2,-9)$ e que 2 seja raiz de g.

13. Determinar os polinômios reais $q(x)$ do segundo grau que verificam a identidade $q(x) = q(1-x) \forall x \in \mathbb{R}$.

14. Considere as matrizes reais: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine valores reais para k, x e y tais que $AB = kB$.

15. Repita o exercício anterior para as matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este exercício merece algum comentário. Cada valor obtido para o escalar k é chamado um **autovalor** da matriz A, e cada solução B correspondente é chamada de **autovetor** de A associado ao autovalor k. Você seria capaz de interpretar geométricamente a situação com a qual estamos lidando ?

16. Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

17. Considere os seguintes sistemas lineares abaixo, onde os coeficientes tomam valores no corpo dos complexos ($\mathbb{C}$).

$$\begin{cases} 2x + (-1+i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(1 + \frac{i}{2}\right) x + 8y - iz - w = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + z + 7w = 0 \end{cases}$$

O segundo sistema pode ser obtido a partir do primeiro através de operações elementares ?

18. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (1-i)x - iy = 0 \\ 2x + (1-i)y = 0 \end{cases}$$

19. Considere o sistema de equações $AX = 0$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz com coeficientes complexos. Mostre que :

(a) Se $ad - bc \neq 0$, o sistema $AX = 0$ possui apenas a solução trivial $x = y = 0$.

(b) Se $ad - bc = 0$ e alguma entrada de A é não nula, então existe uma solção (x^0, y^0) tal que (x, y) é solução se, e somente se, existe um escalar complexo k tal que $x = kx^0$ e $y = ky^0$.

20. Encontre duas matrizes 2×2 distintas tais que $A^2 = 0$ mas $A \neq 0$.

21. Sejam A, B matrizes tais que $AB = I$, onde I é a matriz identidade da ordem necessária. Mostre que $BA = I$. Isto é válido para matrizes de quaisquer ordens ?

22. Seja
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$
uma matriz 2×2. Mostre que existem matrizes 2×2 tais que $C = AB - BA$ se, e somente se, $C_{11} + C_{22} = 0$.

23. Mostre que a matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$
é inversível.