

Grupos de Reflexão e Edifícios de Tits

Marcelo Firer

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Grupos Finitos de Reflexão	9
2.1	Grupos Finitamente Gerados	9
2.2	Reflexões	10
2.2.1	Exercícios	19
2.3	Sistemas de raízes	21
2.3.1	Exercícios	35
2.4	Classificação dos Grupos Finitos	36
3	Estrutura Simplicial	53
3.1	Estrutura de Cômodos	56
3.2	Propriedades Básicas de Células	59
3.3	A Ação de W em Σ	61
3.4	Exercícios	64
4	Edifícios Esféricos	67
4.1	Pares BN	74
4.2	Exercícios	79
5	Edifícios Associados a Espaços Simétricos	81
5.1	Espaços Simétricos	81
5.1.1	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$	84
5.2	Fronteira Ideal	85
5.3	Estrutura de Edifício da Fronteira Ideal	86
5.3.1	Fronteira Ideal de $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$	87
5.4	Teorema da Rigidez de Mostow	88

6	Apêndice1: Teoria de Grupos	91
6.1	Generalidades sobre Grupos	91
6.2	Apresentação de Grupos	94
6.3	Representação de Grupos	99
6.4	Ações de Grupos	101
7	Apêndice 2: Isometrias de Espaços Euclidianos	109

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Edifícios de Tits, cujo nome homenageia o pionerismo de Jaques Tits, começou a formar-se a partir da década de 70 com o intuito primeiro de associar objetos geométricos a grupos algébricos, em certo sentido mimezizando a rica estrutura de grupos e álgebras de Lie semi-simples reais e complexas.

Um edifício é uma estrutura simplicial, não necessariamente finita, obtida a partir da identificação, respeitadas certas condições axiomáticas, de diversas cópias de um mesmo complexo de Coxeter. A estrutura rica de complexos e grupos de Coxeter traduzem-se em propriedades de rigidez bastante fortes dos edifícios, e são estas propriedades que permitiram aplicações a contextos distintos do imaginado por Tits. Já em 1978, poucos anos após a publicação do primeiro trabalho sobre edifícios ([Ti]), Mostow ([Mo]) fez uso desta estrutura para a demonstração do seu famoso Teorema de Rigidez.

O principal objetivo deste texto é introduzir de modo breve os principais elementos da Teoria de Edifícios e delinear de forma esquemática algumas aplicações.

Para apresentar a estrutura de um edifício devemos começar estudando os grupos e complexos de Coxeter. Considerando que este texto tem o propósito de ser uma mera introdução à teoria, fizemos algumas opções que visam torná-lo conciso sem ser superficial em sua parte central.

A primeira delas é nos restringirmos aos edifícios esféricos, o que implica, com relação aos grupos de Coxeter, em explorarmos apenas o caso dos grupos finitos. Embora estejamos deixando de lado uma parte significativa da teoria, a passagem do caso de edifícios esféricos para o de edifícios euclidianos (ou afins), assim como de grupos de Coxeter finitos para grupos de Coxeter in-

finitos, é bastante natural e o leitor interessado em se aprofundar no assunto pode consultar qualquer um dos livros textos constantes da bibliografia ([Ro] e [Br]), embora o leitor deste texto provavelmente tenha mais facilidade em reconhecer a notação do segundo destes textos.

A segunda das opções feitas refere-se aos grupos de Coxeter. Para tornar os grupos mais palpáveis, escolhemos trabalhar primordialmente com grupos de reflexão em espaços euclidianos e apenas indicamos como passar destes para os grupos de Coxeter abstratos, definidos em termos de geradores e relações. A passagem é bastante simples e pode ser encontrada em detalhes em [Hu].

Por fim, as aplicações e usos da estrutura, assim como o enfoque original de Tits, a passagem de pares BN a edifícios, são apresentadas de forma bastante esquemática, temo que por vezes até superficial, e acredito mereça ser ampliada em ocasião futura. De qualquer modo, as referências apresentadas são bastante inteligíveis e podem preencher esta lacuna do texto.

Os três primeiros capítulos, nos quais apresentamos os grupos finitos de reflexão, a estrutura simplicial associada a estes e os edifícios esféricos construídos a partir das estruturas simpliciais, estão razoavelmente completos, e praticamente todos os resultados estão demonstrados com detalhes, incluindo a classificação dos grupos finitos de reflexão e alguns poucos exercícios que complementam a teoria. Os pré-requisitos para estes capítulos, a parte principal deste texto, é um conhecimento básico de Teoria de Grupos e Álgebra Linear. Ao longo do texto, utilizamos frequentemente conceitos e resultados sobre representação de grupos, apresentações de grupos e ações de grupos. Não utilizamos resultados avançados relativos a estes conceitos, mas como estes nem sempre são vistos em um primeiro contato com a Teoria de Grupos, decidimos apresentá-los em um apêndice os principais fatos e resultados necessários, sem sobrecarregar o leitor com demonstrações, mas sem muita economia de exemplos, necessários para se obter um mínimo de intimidade com os objetos de estudo. Incluímos ainda um segundo apêndice no qual determinamos, com demonstrações razoavelmente detalhadas, o grupo de isometrias dos espaços euclidianos, outra questão muitas vezes omitida nos cursos de graduação.

O quarto capítulo tem um caráter totalmente distinto e provavelmente será omitido por grande parte dos leitores. Neste, introduzimos a relação entre edifícios esféricos e espaços simétricos do tipo não compacto, incluindo um esboço das principais etapas da demonstração do Teorema de Rigidez de Mostow, que faz uso essencial desta estrutura. Trata-se de um tópico bas-

tante avançado e complexo, e que exige do leitor amadurecimento e dedicação. O que apresentamos é apenas um roteiro quase esquemático que esperamos, possa servir de guia e incentivo ao leitor mais entusiasmado. Para compensar um pouco a superficialidade com que tratamos o tema, apresentamos de forma detalhada (embora sem demonstrar qualquer um dos fatos) como os elementos e as estruturas de grupos e álgebras semi-simples se realizam no caso particular, mas ilustrativo, do grupo especial $SL(n, \mathbb{R})$ e sua álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

A parte principal deste texto, os três primeiros capítulos, não exige muitos pré-requisitos, sendo acessível a estudantes com um curso básico de Álgebra Linear e de Teoria de Grupos. Como todo curso de ciências exatas e tecnológicas oferece disciplina de Álgebra Linear já na fase inicial da formação, assumimos que o leitor tenha um domínio razoável destes conteúdos. Já o estudo de Teoria de Grupos geralmente é postergado para estágios mais avançados da formação e nem sempre contempla alguns aspectos que são explorados neste texto, como apresentação e ação de grupos. Assim, para tornar este texto o mais auto-contido possível, escrevemos um apêndice sobre Teoria de Grupos. Além deste, temos um outro apêndice, breve mas detalhado, em que construímos os grupos de isometrias dos espaços euclidianos, construção conhecida mas difícil de ser encontrada de forma explícita na literatura profissional.

Capítulo 2

Grupos Finitos de Reflexão

Começamos este capítulo com as definições e exemplos básicos. Caso o leitor sinta alguma dificuldade já na primeira seção, sugerimos que comece a leitura pelo Apêndice 6, onde explicamos de modo um pouco mais detalhados o que aqui é apenas mencionado.

2.1 Grupos Finitamente Gerados

Lembremos antes de mais nada que um **sistema de geradores** de um grupo G é um conjunto $S = \{s_i | i \in I, s_i \in G\}$ tal que para todo elemento $g \in G$, existe subconjunto ordenado finito $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de elementos de I (não necessariamente distintos) tal que $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$. Neste texto, assumiremos sempre que S é, no máximo, enumerável e quase sempre assumiremos S finito. Uma **palavra** definida no conjunto de geradores S nada mais é que uma seqüência finita $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ de elementos de S . Por definição, a identidade $1 \in G$ é associada à palavra gerada pelo conjunto vazio. De modo geral, dizemos que a palavra $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ tem **comprimento** k .

Consideremos o grupo livre $\mathbb{F}^{|I|}$ gerado formalmente por $S = \{s_i, s_i^{-1} | i \in I\}$: $\mathbb{F}^{|I|}$ nada mais é que o conjunto de todas as palavras que podem ser formadas por elementos de S , onde o produto de dois elementos $g = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$, $h = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r}$ é definido pela concatenação: $gh = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r}$. É um fato conhecido que dado um grupo G gerado por $S = \{s_i | i \in I\}$, existe um subgrupo normal $N \triangleleft \mathbb{F}^{|I|}$ tal que $G \simeq \mathbb{F}^{|I|}/N$. Chamamos de **conjunto de relações de G** a um conjunto R de geradores de N . Como cada elemento de N e portanto de R pode ser descrito como uma palavra $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$, podemos expressar R como um conjunto de igualdades da forma $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} = 1$. Com

esta notação, diremos que $\langle S|R \rangle$ é uma **apresentação** do grupo $G \simeq \mathbb{F}^{|I|}/N$ se S for um sistema de geradores e R um conjunto de relações de G . Uma apresentação $\langle S|R \rangle$ é dita finita quando ambos os conjuntos S e R forem finitos.

Exemplo: Seja \mathbb{Z}^n o grupo abeliano gerado por n elementos. Temos então que

$$\mathbb{Z}^n \simeq \langle s_1, \dots, s_n | s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} = 1; i, j = 1, \dots, n \rangle.$$

□

Exemplo: Um grupo cíclico G de ordem n é apresentado por $\langle s | s^n = 1 \rangle$. □

Dada uma apresentação de grupo $G = \langle S|R \rangle$, definimos a **norma** de um elemento g como sendo o comprimento da menor palavra que o representa:

$$|g| = \inf_r \{g = s_1 s_2 \cdots s_r | s_i \in S\}.$$

Definimos a parte a norma do elemento identidade como sendo 0. Da definição segue que $|g| = 1$ se e somente g for um gerador do grupo. Para evitarmos algumas complicações desnecessárias, iremos assumir sempre que $S = S^{-1}$. Esta norma define uma distância em G , dada por $d(g, h) = |h^{-1}g|$, conhecida como distância de Cayley. Tanto a norma como a distância dependem da escolha de sistemas de geradores, embora algumas propriedades, principalmente propriedades assintóticas em grupos infinitos, independam destas escolhas.

2.2 Reflexões

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno, então a forma bilinear associada é simétrica e positiva definida, de modo que o par $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ é um espaço euclidiano. Mais adiante, poderemos considerar a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como sendo apenas não degenerada, ao invés de positiva definida, mas deixaremos claro o contexto em que enfraquecemos esta hipótese. Um **hiperplano** $H \subset V$ é um subespaço vetorial de codimensão 1. A **reflexão** no hiperplano H é a transformação linear $s_H : V \rightarrow V$ definida como sendo a identidade quando restrita a H e $-\text{Id}$ no complemento ortogonal (subespaço unidimensional)

H^\perp de H . Um hiperplano vetorial é bem definido pela escolha de um vetor não nulo α perpendicular a este:

$$H = \{v \in V \mid \langle \alpha, v \rangle = 0\}.$$

Assim, dado $0 \neq \alpha$ perpendicular a H , denotaremos este por H_α e s_H por s_α . Denotamos ainda por L_α o espaço unidimensional gerado por α : $L_\alpha = \mathbb{R}\alpha$. Em termos de α , podemos expressar a reflexão em H por uma fórmula bastante simples,

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2\langle \alpha, v \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

que pode ser facilmente compreendida a partir da figura abaixo.

Para mostrar esta expressão, basta constatar que $s_\alpha(v) = v$ se e somente se $v \in H$ (pois sendo $\alpha \neq 0$ temos que $\frac{2\langle \alpha, v \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = 0$ se e somente se $\langle \alpha, v \rangle = 0$) e $s_\alpha(v) = -v$ se e somente se $v \in H^\perp = \mathbb{R}\alpha$. As propriedades abaixo são facilmente demonstráveis.

Observação 2.2.0.1 Para todo real $c \neq 0$, $s_\alpha = s_{c\alpha}$.

Observação 2.2.0.2 A reflexão é uma **involução**, ou seja, $s_\alpha^2 = \text{Id}$.

Observação 2.2.0.3 Se considerarmos uma base ortogonal $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, a transformação s_α é definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como, por definição, o vetor α é ortogonal ao hiperplano H_α , temos que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ é uma base de H_α .

Na realidade podemos ser um pouco mais genéricos e considerar, ao invés de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, uma base qualquer $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ do hiperplano H_α a qual adicionamos o vetor α , obtendo uma base $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ relativa a qual a s_α é definida pela matriz acima. Assim, temos que a reflexão s_α é uma transformação ortogonal, ou seja $\langle s_\alpha(v), s_\alpha(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. Em outras palavras, $s_\alpha \in O(n, V)$, o grupo das transformações ortogonais de V . Em termos matriciais, s_α é representada por uma matriz A tal que $AA^T = \text{Id}$, com determinante -1 , independentemente da base que escolhermos.

Definição 2.2.0.4 Um **grupo finito de reflexões** é um grupo finito $W \subset O(n, V)$ gerado por um conjunto de reflexões s_H , onde H percorre um conjunto \mathcal{H} de hiperplanos de V .

Observação 2.2.0.5 O termo **reflexão** refere-se aos geradores de W e não aos seus elementos. De fato, o produto de duas reflexões nunca é uma reflexão. Podemos constatar este fato considerando que uma matriz associada a uma reflexão tem sempre determinante -1 . Logo, o produto de um número par $2n$ de rotações tem sempre determinante $(-1)^{2n} = 1$, não podendo ser uma reflexão. Já o produto de um número ímpar de reflexões, embora representado por uma matriz de determinante -1 pode ou não ser uma reflexão.

Consideremos os seguintes exemplos:

1. Considere em \mathbb{R}^2 o grupo W gerado por duas reflexões s_α e s_β . Então, a composta $s_\alpha s_\beta$ é uma rotação de um ângulo 2θ , onde $0 < \theta \leq \pi/2$ é o ângulo entre as retas $\mathbb{R}\alpha$ e $\mathbb{R}\beta$. Se identificarmos V com o plano complexo, temos que esta rotação é dada por $s_\alpha s_\beta(z) = e^{i2\theta}z$ e é imediato constatar que $s_\alpha s_\beta$ tem ordem finita se e somente se π/θ for racional, pois $(s_\alpha s_\beta)^n(z) = e^{i2n\theta}z$ e $e^{i2n\theta} = 1$ se e somente se $2n\theta$ for múltiplo inteiro de 2π . Este exemplo ilustra bem o fato de que a exigência de o grupo ser finito é uma condição bastante forte.
2. Considere em \mathbb{R}^3 as reflexões nos planos coordenados: s_x, s_y e s_z . Estas reflexões se realizam simplesmente mudando o sinal de uma coordenada, ou seja,

$$\begin{aligned} s_x((x, y, z)) &= (-x, y, z) \\ s_y((x, y, z)) &= (x, -y, z) \\ s_z((x, y, z)) &= (x, y, -z) \end{aligned}$$

de modo que

$$s_x \circ s_y \circ s_z((x, y, z)) = -(x, y, z)$$

não é uma reflexão, pois o único ponto fixo é o vetor nulo. Não obstante, é fácil verificar que ao compormos $s_x \circ s_y \circ s_x$ obtemos a reflexão s_y .

É óbvio que, se W for um grupo finito de reflexões agindo em V , então qualquer órbita $W(v)$ será finita. A recíproca também é verdadeira, desde que consideremos vetores não nulos, e serve como um critério útil para determinarmos a finitude de um grupo:

Proposição 2.2.0.6 *Seja Φ um conjunto finito não vazio de vetores não nulos e $\mathcal{H} = \{H_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ um conjunto de hiperplanos. Seja $W = \langle s_\alpha | \alpha \in \Phi \rangle$. Então, W é finito se Φ for invariante pela ação de W .*

Demonstração: Seja V_1 o subespaço de V gerado por Φ e V_0 o complemento ortogonal de V_1 . Temos então que

$$V_0 = \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$$

de modo que V_0 é o conjunto dos pontos fixos de W :

$$V_0 = \{v \in V | w(v) = v \text{ para todo } w \in W\}.$$

Como $V = V_0 \oplus V_1$, temos que a ação de W em V é determinada por sua ação em V_1 , que por sua vez é determinada pela ação em qualquer conjunto de geradores de V_1 . Como V_1 é gerado por Φ e este é invariante por W , podemos considerar W como um subgrupo do grupo de permutações de Φ , que é um grupo finito. \square

De modo genérico, chamamos o conjunto dos pontos fixos de W ,

$$V_0 = \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$$

de **parte inessencial** de V e seu complemento ortogonal $V_1 = V_0^\perp$ de **parte essencial**. O par (W, V) é dito **essencial** se $V_0 = \{0\}$. Como podemos decompor sempre $V = V_0 \oplus V_1$ e a ação de W em V_0 é trivial, podemos identificar W com um grupo agindo em V_1 e, agindo deste modo, o par (W, V_1) é sempre essencial.

Vamos agora apresentar diversos exemplos de grupos finitos de reflexão. Existem duas fontes clássicas de exemplos.

A primeira delas é a teoria dos sólidos regulares (em dimensão arbitrária), conhecidos como sólidos de Platão no caso tridimensional: considerando-se os sólidos com baricentro na origem do espaço euclidiano, associamos ao sólido o seu grupo de simetrias, ou seja, o grupo de isometrias do espaço euclidiano ambiente que deixa o sólido invariante.

A segunda destas fontes, que exploraremos com um pouco de detalhes mais adiante, é a teoria de sistema de raízes, que surgiu do estudo de álgebras e grupos de Lie.

Passemos, pois, aos exemplos:

Exemplo: [$\mathbf{I}_2(n), n \geq 3$] Seja $\dim V = 2$ e considere duas retas pela origem formando um ângulo de π/n . Sejam s e t as reflexões correspondentes a estas duas retas e $I_2(n) = \langle s, t \rangle$. O produto $r = st$ é uma rotação de $2\pi/n$ e assim sendo tem ordem n , ou seja, $r^n = \text{Id}$. Se notarmos que

$$\begin{aligned} srs^{-1} &= s(st)s = s^2ts = ts = r^{-1} \\ trt^{-1} &= t(st)t = s^2ts = ts = r^{-1} \end{aligned}$$

vemos que $\langle r \rangle$ é um subgrupo normal de ordem n .

Se quisermos ser mais explícitos em relação a s e t , considerando s como um eixo coordenado, podemos representar os geradores pelas matrizes

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \\ -2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} & 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

dado um grupo G e subgrupo $H \subseteq G$ (não necessariamente normal), é fato conhecido que, G é finito se e somente se H e o conjunto de classes laterais G/H forem ambos finitos. Neste caso, a ordem (cardinalidade) de G , denotada por $|G|$, é dada pela equação

$$|G| = |H| \cdot |G/H|.$$

Assim, para mostrarmos que $I_2(n)$ é um grupo finito, vamos mostrar que $I_2(n)/\langle r \rangle$ é finito e de ordem 2. Para isto, basta mostrarmos que as classes laterais $s\langle r \rangle$ e $t\langle r \rangle$ coincidem. Mas

$$sr = s(st) = t \in t\langle r \rangle$$

e como duas classes laterais ou coincidem ou são disjuntas, temos que $s\langle r \rangle = t\langle r \rangle$ e $I_2(n)/\langle r \rangle$ tem ordem 2.

Este grupo é conhecido como grupo diedral de ordem $2n$, o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados e também denotado (em outros contextos) por D_{2n} . \square

Exemplo: [$\mathbf{A}_n, n \geq 1$] Seja $V = \mathbb{R}^{n+1}$ com o produto interno usual e S_{n+1} o grupo simétrico. S_{n+1} age em \mathbb{R}^{n+1} permutando as coordenadas: dados $\sigma \in S_{n+1}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos

$$\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}).$$

É conhecido o fato que S_{n+1} é gerado pelas transposições (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, n+1$. Cada transposição (i, j) determina uma reflexão s_{ij} em \mathbb{R}^{n+1} , em torno do hiperplano $H_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i = x_j\}$. De fato, ao permutarmos a j -ésima coordenada com a i -ésima coordenada de um vetor, este permanece fixo se e somente se estas coordenadas são iguais, ou seja, se este pertence ao hiperplano H_{ij} . Mais ainda, H_{ij} é determinado pelo vetor

$$\alpha_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$$

onde as entradas não nulas aparecem nas coordenadas i e j . Ao permutarmos estas duas coordenadas, ou seja, ao considerarmos sua imagem pela transposição $s_{i,j}$, obtemos

$$\begin{aligned} s_{ij}(\alpha_{i,j}) &= s_{ij}((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)) \\ &= (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &= -\alpha_{ij}, \end{aligned}$$

e temos que s_{ij} é de fato a reflexão no hiperplano H_{ij} .

Em termos matricial (considerando-se a base canônica de \mathbb{R}^{n+1}), temos que σ_{ij} é obtida a partir da matriz identidade pela transposição da i -ésima e da j -ésima coluna, por exemplo, a matriz associada a transposição $(1, 2)$ é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

e é imediato constatarmos que s_{ij} é de fato uma transformação ortogonal ($AA^T = \text{Id}$). Assim, definimos A_n como sendo a imagem da representação de S_n definida pela identificação $(i, j) \mapsto s_{ij}$.

Note que a ação de S_{n+1} em \mathbb{R}^{n+1} não é essencial, pois

$$V_0 = \bigcap_{i,j} H_{ij} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) | x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}\}.$$

A ação torna-se essencial se considerarmos sua restrição ao complemento ortogonal

$$V_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) | x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0\}.$$

□

Exemplo: [$\mathbf{B}_n, n \geq 2$] Novamente, consideramos $V = \mathbb{R}^n$ e a mesma ação de S_n permutando as coordenadas como no exemplo anterior. Para simplificar a notação, sempre que não houver o risco de ocorrermos em ambiguidades, vamos identificar S_n com sua imagem no grupo ortogonal, ou seja, vamos abusar da linguagem e escrever $S_n = \langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$. Conforme vimos no exemplo anterior, as transposições s_{ij} agem em \mathbb{R}^n como reflexões nos hiperplanos $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = x_j\}$. Além destas, consideramos as reflexões t_i em torno dos hiperplanos $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0\}$, que muda o sinal da i -ésima coordenada. Estas reflexões geram um grupo $\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle$ com 2^n elementos, isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. De fato, vamos considerar um elemento genérico $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ onde cada ε_i é igual a $\bar{0}$ ou $\bar{1}$, as classes laterais definidas por $0, 1 \in \mathbb{Z}$. Lembre que $\bar{0}$ é o elemento neutro de \mathbb{Z} , de modo que $(\bar{0}, \dots, \bar{0})$ é o elemento neutro de \mathbb{Z}^n . Vamos assumir por definição que

$$t_i^{\varepsilon_i} = \begin{cases} \text{Id} & \text{se } \varepsilon_i = \bar{0} \\ t_i & \text{se } \varepsilon_i = \bar{1} \end{cases}$$

e definimos

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n &\rightarrow \langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) &\mapsto t_1^{\varepsilon_1} \circ t_2^{\varepsilon_2} \circ \dots \circ t_n^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

Para demonstrar que Ψ é de fato um isomorfismo, é necessário observar que as reflexões t_i e t_j comutam, ou seja, $t_i \circ t_j = t_j \circ t_i$. Em termos matriciais, considerando base ortonormal, este grupo é representado pelas matrizes diagonais com entradas na diagonal iguais a ± 1 . Se lembrarmos que S_n é representado por matrizes monomiais em que todas as entradas não nulas são iguais a $+1$, é imediato observarmos que a intersecção desse grupo com S_n é trivial ($\Psi((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n) \cap S_n = \{\text{Id}\}$) e este é normalizado por S_n ($\sigma(\Psi((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n))\sigma^{-1} = \Psi((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$, para todo $\sigma \in S_n$). Definimos então B_n como sendo o grupo gerado pelas reflexões $\{t_i | i = 1, \dots, n\} \cup \{s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$. Em termos matriciais, é representado pelas matrizes monomiais com entradas não nulas iguais a ± 1 . Como $\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle$ tem ordem 2^n e $\langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ tem ordem $n!$, o produto B_n tem ordem $2^n n!$. Já vimos no exemplo anterior que um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é fixo pela ação de $\langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Mas

neste caso, a menos que tenhamos $x = 0$, temos que

$$\begin{aligned} t_i((x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_n)) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, x_n) \\ &\neq (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_n) \end{aligned}$$

e segue que a ação de B_n em \mathbb{R}^n é essencial. \square

Exemplo: [$\mathbf{D}_n, n \geq 4$] Considere o subgrupo de B_n gerado pelas reflexões s_{ij}^* em torno dos hiperplanos $H_{ij}^* := \{x_i + x_j = 0\}$. Considerando a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, temos que o vetor $e_i + e_j$ é ortogonal a H_{ij}^* de modo que $s_{ij}^*(e_i + e_j) = -e_i - e_j$, ao passo que $s_{ij}^*(e_i - e_j) = e_i - e_j$, pois este pertence a H_{ij}^* . Como podemos escrever

$$e_i = \frac{(e_i + e_j) + (e_i - e_j)}{2}, \quad e_j = \frac{(e_i + e_j) - (e_i - e_j)}{2},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} s_{ij}^*(e_i) &= -e_j \\ s_{ij}^*(e_j) &= -e_i \\ s_{ij}^*(e_k) &= e_k, \text{ se } k \neq i, j. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a matriz de s_{ij}^* é obtida a partir da matriz identidade permutando-se a i -ésima coluna pela j -ésima coluna e multiplicando-as por -1 . Se os índices envolvidos são todos distintos ($\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$) a matriz associada a $s_{ij}^* \circ s_{kl}^*$ permuta a i -ésima coluna com a j -ésima, a k -ésima com a l -ésima e altera o sinal de ambas. Já se um dos índices coincide, digamos $j = k$, a matriz associada a $s_{ij}^* \circ s_{jl}^*$ é obtida a partir da matriz identidade através da permutação (i, j, l) aplicada às colunas correspondentes, de modo que três colunas estão envolvidas na permutação. No entanto, apenas duas delas (as colunas j e l) tem o seu sinal alterado, conforme ilustrado no exemplo abaixo, para o caso de matrizes 4×4 :

$$s_{i2}^* \circ s_{23}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{i2}^* \circ s_{34}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generalizando este raciocínio para um número qualquer de composições, podemos mostrar que este grupo é representado pelas matrizes obtidas por permutações de colunas da identidade em que um número **par** de colunas possui entradas negativas. Definimos D_n como sendo o grupo gerado pelas reflexões

$$\{s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{s_{ij}^* | 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Este é um subgrupo de índice 2 de B_n (veja exercício 2). Como B_n tem ordem $2^n n!$ e D_n tem índice 2 em B_n , concluímos que $|D_n| = 2^n n! / 2 = 2^{n-1} n!$.

Observe que D_n contém S_n como subgrupo e os únicos vetores invariantes por S_n são aqueles que tem todas as coordenadas idênticas, $x_a = (a, a, \dots, a)$. Claramente, ao considerarmos a reflexão s_{12}^* obtemos que

$$\begin{aligned} s_{12}^*(a, a, \dots, a) &= (-a, -a, a, \dots, a) \\ &\neq (a, a, \dots, a) \end{aligned}$$

se $a \neq 0$, ou seja, se $x_a \neq 0$. Temos então que a ação de D_n em \mathbb{R}^n é essencial. \square

Observação 2.2.0.7 *Os dois últimos exemplos acima podem ser encarados de modo bastante natural como produtos semi-diretos*¹.

¹Dados dois subgrupos $H, K \subset G$ tais que $H \cap K = \{e\}$, H subgrupo normal de G e $G = HK := \{hk | h \in H, k \in K\}$, dizemos então que G é o produto semidireto de H e K e denotamos este produto por $G = K \rtimes H$. Observe que, como $G = HK$, dizermos que H é normal em G equivale a afirmar que H é normalizado por K . Se ao invés de dois subgrupos de um grupo dado tivermos dois grupos abstratos H e K e uma ação de $\rho : K \times H \rightarrow H$, podemos definir a soma semidireta $K \rtimes H$ como sendo o grupo que, como conjunto, nada mais é que o produto cartesiano $K \times H$. Definimos a identidade de $K \rtimes H$ como sendo o

No caso de B_n temos que a intersecção dos grupos

$$\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle \text{ e } \langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

tem intersecção trivial. De fato, considerando as representações matriciais, temos que o primeiro consiste de matrizes diagonais com entradas ± 1 enquanto o segundo consiste de matrizes monomiais com entradas $+1$. Além disto, temos que

$$s_{ij} \circ t_k \circ s_{ij} = \begin{cases} t_k & \text{se } k \neq i, j \\ t_i & \text{se } k = j \\ t_j & \text{se } k = i \end{cases},$$

de modo que $\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle$ é normalizado por $\langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$, ou seja, $\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle$ é normal no grupo gerado por

$$\{t_i | i = 1, \dots, n\} \cup \{s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Segue que B_n é produto semidireto destes dois subgrupos (exercício 9).

Já no caso de D_n , temos que $\langle s_{ij}^* | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ é normalizado por $\langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ e estes tem intersecção trivial. Detalhes podem ser demonstrados de maneira similar (exercício 10).

2.2.1 Exercícios

1. Sejam l e m duas retas concorrentes no plano euclidiano, e seja $0 \leq \theta \leq \pi/2$ o menor ângulo entre estas. Sejam s_l e s_m as reflexões nestas retas. Mostre que $s_l \circ s_m$ é uma rotação de um ângulo 2θ em torno do ponto de intersecção. Quando podemos afirmar que estas reflexões comutam, ou seja, $s_l \circ s_m = s_m \circ s_l$?
2. Considere a reflexão t_1 em torno do hiperplano $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\}$. Mostre que todo elemento de B_n é gerado por D_n e $\{t_1\}$. Conclua que D_n tem índice 2 em B_n .
3. Mostre que $I_2(n)$ é o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados. Seja $\xi = e^{i2\pi/6}$ e $R = \{\xi^j, \xi^j + \xi^{j+1} | j = 0, \dots, 5\}$. Mostre que R é invariante pela ação de $I_2(6)$.

elemento (e_K, e_H) e o produto $(k_1, h_1) * (k_2, h_2) = (k_1 k_2, h_1 \rho(k_1, h_2))$. Com esta definição, temos que $(k, h)^{-1} = (k^{-1}, \rho(k^{-1}, h^{-1}))$. Se considerarmos os subgrupos canônicos $K^* = \{(k, e_H) | k \in K\}$ e $H^* = \{(e_K, h) | h \in H\}$, obtemos que $K^* \rtimes H^* = K \rtimes H$.

As duas famílias de exemplo acima, B_n e D_n , são o produto semidireto de S_n com os grupos $\langle t_i | i = 1, \dots, n \rangle$ e $\langle s_{ij}^* | i, j = 1, \dots, n, i \neq j \rangle$ respectivamente.

4. Considere uma base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} . Seja σ' a intersecção do hiperplano afim definido pela equação $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1$ com o fecho convexo dos elementos da base (o conjunto das combinações lineares $\sum \alpha_i e_i$ com $\alpha_i \geq 0$ e $\sum \alpha_i = 1$). Seja b o baricentro de σ' e defina $\sigma = \sigma - b = \{x - b | x \in \sigma'\}$. Mostre que A_n é o grupo de simetrias de σ .
5. Considerando uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , mostre que os elementos de A_n são representados por matrizes monomiais (matrizes que em cada linha e em cada coluna tem exatamente uma entrada não nula) unitárias (a entrada não nula é igual a 1).
6. Mostre que A_3 é o grupo de simetrias do tetraedro com vértices nos pontos

$$\left(1, -\sqrt{3}, \frac{-11 - 11\sqrt{3}}{4}\right), \left(-2, 0, \frac{-11 - 11\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left(1, \sqrt{3}, \frac{-11 - 11\sqrt{3}}{4}\right), \left(0, 0, \frac{5 + 13\sqrt{3}}{4}\right).$$

7. Mostre que B_3 é o grupo de simetrias de um cubo com vértices nos pontos $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, com $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, 3$.
8. Mostre que B_n é o grupo de simetrias do n -cubo $[-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que também pode ser considerado como o grupo de simetrias do n -octaedro, o fecho convexo de $\{\pm e_i | i = 1, \dots, n\}$. Qual a relação entre o n -cubo e o n -octaedro?
9. Dados $s_{ij}, t_k \in B_n$, verifique que

$$s_{ij} \circ t_k \circ s_{ij} = \begin{cases} t_k & \text{se } k \neq i, j \\ t_i & \text{se } k = j \\ t_j & \text{se } k = i \end{cases}.$$

Conclua que $B_n = \{t_i | i = 1, \dots, n\} \rtimes \langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$.

10. Mostre que $D_n = \langle s_{ij}^* | 1 \leq i < j \leq n \rangle \rtimes \langle s_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$

2.3 Sistemas de raízes

De agora em diante, consideraremos W como um grupo de reflexões finito. Por definição, W é gerado por reflexões s_α , cada uma delas determinando um hiperplano H_α e uma reta $L_\alpha = H_\alpha^\perp$. Estas retas são permutadas pelo grupo W , conforme segue da proposição abaixo.

Proposição 2.3.0.1 *Dado $t \in O(V)$ e $\alpha \in V$, então $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$. Em particular, se $w, s_\alpha \in W$, então $s_{w(\alpha)} \in W$.*

Demonstração: Para demonstrar que $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$ devemos mostrar que $ts_\alpha t^{-1}(t(\alpha)) = -t(\alpha)$ e $ts_\alpha t^{-1}(y) = y$ se $y \in H_{t(\alpha)}$. Mas

$$ts_\alpha t^{-1}(t(\alpha)) = ts_\alpha(\alpha) = t(-\alpha) = -t(\alpha).$$

Além disto, se $y \in H_{t(\alpha)}$, podemos escrever $y = t(x)$, com $x \in H_\alpha$ e obtemos que

$$ts_\alpha t^{-1}(y) = ts_\alpha t^{-1}(t(x)) = ts_\alpha(x) = t(x) = y.$$

Assim, concluímos que, de fato, $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$. \square

Observe que o grupo W determina as retas L_α mas não um conjunto específico de vetores diretores destas retas. Através da definição abaixo, será especificada uma escolha de vetores associados ao conjunto de tais vetores, chamados de *raízes*:

Definição 2.3.0.2 *Seja W um grupo finito de reflexões. Um **sistema de raízes** de W é um conjunto não vazio Φ de vetores não nulos tais que:*

1. $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ para todo $\alpha \in \Phi$;
2. W é gerado por $\{s_\alpha | \alpha \in \Phi\}$;
3. Φ é invariante por W , ou seja, $w(\Phi) = \Phi$ para todo $w \in W$.

Os elementos de Φ são chamados de **raízes**.

Observe que, a cada grupo finito de reflexões, estamos associando um sistema de raízes (não único, pois se Φ é sistema de raízes, então $c\Phi := \{c\alpha | \alpha \in \Phi\}$ também o é, para todo $0 \neq c \in \mathbb{R}$). Se considerarmos a priori

que W seja gerado pelas reflexões s_α , a segunda condição torna-se redundante e a terceira pode ser expressa por $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.

São os sistemas de raízes que nos permitirão (seção 2.4) classificar os grupos de reflexão. Antes de darmos alguns exemplos, vamos introduzir alguns conceitos relacionados.

Considere em um espaço vetorial V uma ordem total qualquer, por exemplo a **ordem lexicográfica**²: fixamos uma base ordenada $\{e_1, \dots, e_n\}$ e dizemos que $\sum a_i e_i < \sum b_i e_i$ se $a_k < b_k$, e $a_i = b_i$ para $i < k$. Em outras palavras, procuramos a primeira coordenada não coincidente destes vetores e a comparamos para ver qual é maior ou menor. Um vetor não nulo v é dito **positivo (negativo)** se $v > 0$ ($v < 0$) ou seja, se sua primeira coordenada não nula for positiva (negativa). Assim, um vetor não nulo $v \in V$ é positivo se e somente se seu oposto $-v$ for negativo.

Vamos agora considerar um grupo finito de reflexões W com sistema de raízes Φ . Como as raízes aparecem aos pares $\{\alpha, -\alpha\}$, ao considerarmos em V uma ordem total, o sistema de raízes Φ é a união disjunta de Π , o **sistema**

²Uma relação de *ordem parcial* em um conjunto A é uma relação entre seus elementos (que sinalizamos por \leq) satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Reflexiva*: $a \leq a, \forall a \in A$;
2. *Anti-simétrica*: Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$;
3. *Transitiva*: Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Obviamente, o símbolo \leq não é adotado por casualidade, mas sim devido ao fato de todas estas propriedades serem satisfeitas pela relação de ordem usual no conjunto dos números reais.

Uma ordem parcial é dita *total* se satisfizer a seguinte propriedade adicional:

4. *Tricotomia*: Dados $a, b \in A$, temos que ou $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Como exemplo, dado um conjunto X , consideramos a família de todos os seus subconjuntos, conhecido como conjunto das partes de X :

$$\mathbb{P}(X) = \{A \subseteq X\}.$$

Este conjunto é parcialmente ordenado pela relação

$$A \subseteq B \text{ se e somente se } A \leq B.$$

No entanto, se $\mathbb{P}(X)$ tiver ao menos dois elementos, este não será totalmente ordenado, pois dados $x, y \in X$ distintos, temos que $\{x\}, \{y\} \in \mathbb{P}(X)$ mas $\{x\} \not\leq \{y\}$ e tampouco $\{y\} \not\leq \{x\}$.

das raízes positivas, e $-\Pi$ o sistema das raízes negativas. Observe que a definição, de sistema positivo é estritamente arbitrária, pois este depende da ordem adotada (veja exercício 1).

Um subconjunto de raízes positivas $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \Pi$ é dito **sistema simples de raízes** se for linearmente independente e toda raiz positiva puder ser escrita como combinação linear $\sum a_i \alpha_i$ com todos os a_i 's de mesmo sinal (podendo eventualmente ser nulo). Observe que, como a definição de um sistema de raízes positivas contém um certo grau de arbitrariedade, o mesmo ocorrerá com um sistema simples. No entanto, mostraremos mais adiante que os sistemas de raízes simples e positivos estão em bijeção, ou seja, dado um sistema positivo Π existe um e apenas um sistema simples contido em Π .

A existência de sistemas positivos de raízes é clara. O mesmo não ocorre para sistemas simples. Antes de demonstrar a existência de sistemas simples, vamos apresentar alguns exemplos.

Exemplos:

1. Seja $W = I_2(n)$, com $n = 2k$ par. Considere a raiz enésima da unidade $\xi = e^{i2\pi/n}$. Então, $\Phi = \{\xi^j, \xi^j + \xi^{j+1} | j = 0, 1, \dots, n-1\}$ é um sistema de raízes. Podemos considerar

$$\begin{aligned}\Pi &= \{\xi^j, \xi^j + \xi^{j+1} | j = 0, 1, \dots, k-1\} \\ -\Pi &= \{\xi^j, \xi^j + \xi^{j+1} | j = k, \dots, n-1\}\end{aligned}$$

como sistema de raízes positivas e negativas respectivamente. Observe que as raízes positivas tem todas parte imaginária maior ou igual a 0, de modo que estamos considerando a ordem lexicográfica definida pela base ordenada $\{i, 1\}$. As raízes simples são dadas por $\Delta = \{\xi^0, \xi^k + \xi^{k+1}\}$. Se considerarmos o caso particular em que $n = 4$, temos que o sistema de raízes positivas

$$\Pi = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$$

ao qual está associado o sistema simples

$$\Delta = \{(1, 0), (-1, 1)\}.$$

De fato, temos que as raízes positivas restantes podem ser expressas em termos destas como combinações lineares com coeficientes psitivos:

$$\begin{aligned}(1, 1) &= 2(1, 0) + (-1, 1) \\ (0, 1) &= (1, 0) + (-1, 1).\end{aligned}$$

2. Seja $W = A_n$. Consideremos a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} e a ordem lexicográfica definida por esta. Temos então que $\Phi = \{e_i - e_j | 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$ é um sistema de raízes e

$$\Pi = \{e_i - e_j | 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

o sistema de raízes positivas definido por esta ordem. O conjunto

$$\Delta = \{e_i - e_{i+1} | i = 1, \dots, n\}$$

é um sistema simples associado a Π . De fato, se $i < j$ temos que

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j).$$

3. Seja $W = B_n$. Considerando base usual de \mathbb{R}^n , obtemos que

$$\Phi = \{\pm e_i \ (1 \leq i \leq n), \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n)\}$$

é sistema de raízes. Considerand-se a ordem lexicográfica induzida por esta base temos que as raízes positivas são dadas por

$$\Pi = \{e_i | i = 1, \dots, n\} \cup \{e_i + e_j | i \neq j; i, j = 1, \dots, n\} \cup \{e_i - e_j | 1 \leq i < j \leq n\},$$

com sistema simples associado

$$\Delta = \{e_n, e_i - e_{i+1} | i = 2, \dots, n\}.$$

De fato, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$e_i = (e_i - e_{i+1}) + \dots + (e_{n-1} - e_n) + e_n,$$

e se $i < j$ temos que

$$e_i + e_j = (e_i - e_{i+1}) + \dots + (e_{j-1} - e_j) + 2(e_j - e_{j+1}) + \dots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n$$

e

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j),$$

como no caso A_n .

4. Seja $W = D_n$. Considerando novamente a base usual de \mathbb{R}^n e a ordem lexicográfica definida por esta, temos que

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

é sistema de raízes e

$$\Pi = \{e_i + e_j \mid i \neq j; i, j = 1, \dots, n\} \cup \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

é sistema de raízes positivas ao qual está associado o sistema simples

$$\Delta = \{e_{n-1} + e_n, e_i - e_{i-1} \mid i = 2, \dots, n\}.$$

De fato, assim como anteriormente, se $i < j$ temos que

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j),$$

e

$$e_i + e_j = (e_1 - e_j) + 2(e_j + e_{j+1}) + \dots + 2(e_{n-2} - e_{n-1}) + (e_{n-1} - e_n) + (e_{n-1} + e_n).$$

□

Construímos sistemas simples de raízes para os exemplos trabalhados até o momento. A existência de sistemas simples de raízes em situações genéricas é demonstrada no segundo ítem do teorema abaixo:

Teorema 2.3.0.3 *Seja Φ um sistema de raízes.*

1. *Então, dado um sistema simples $\Delta \subset \Phi$, existe um único sistema positivo Π que o contém.*
2. *Reciprocamente, dado um sistema positivo de raízes $\Pi \subset \Phi$, existe um único sistema simples $\Delta \subset \Pi$.*

Demonstração:

1. *Seja Δ sistema simples. Então toda raiz de Φ é combinação linear de elementos de Δ com coeficientes de mesmo sinal. Assim, um sistema positivo Π deve conter todas as raízes que são combinações lineares positivas de elementos de Δ e não podem conter as outras, de modo que Π está bem caracterizado, ou seja, se existir é único (contendo Δ). Para demonstrar a existência de Π , lembramos que Δ é linearmente independente de modo que podemos completá-lo a uma base de V . Feito isto, basta considerarmos a ordem lexicográfica determinada por esta base.*

2. Suponha agora que é dado um sistema positivo de raízes Π . Novamente, a unicidade de um sistema simples (contido em Π), se existir, é fácil de constatar. Para mostrar a existência, tome $\Delta \subset \Pi$ mínimo, sujeito a condição de podermos expressar toda raiz em Π como combinação linear positiva de elementos de Δ . Para mostrar que Δ é um sistema simples de raízes, basta verificar que Δ é linearmente independente.

□

Demonstração:

1. Isto será feito utilizando-se a desigualdade

$$(\alpha, \beta) \leq 0, \text{ se } \alpha \neq \beta \in \Delta, \quad (2.1)$$

que será demonstrada logo mais. De fato, suponha que Δ não seja linearmente independente. Então, existe combinação linear não nula $\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha = 0$. Agrupando os coeficientes positivos e negativos desta combinação linear, podemos reescreve-la como

$$v = \sum_{\beta \in \Delta_1} b_\beta \beta = \sum_{\gamma \in \Delta_2} c_\gamma \gamma$$

com $\Delta = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2$ (união disjunta) e todos os coeficientes $b_\beta, c_\gamma \geq 0$. Observe que, como nem todos os coeficientes são nulos, temos $v \neq 0$. Mas, assumindo que $(\alpha, \beta) \leq 0$ para raízes em Δ , obtemos

$$0 \leq (v, v) = \left(\sum_{\beta \in \Delta_1} b_\beta \beta, \sum_{\gamma \in \Delta_2} c_\gamma \gamma \right) = \sum_{\beta \in \Delta_1, \gamma \in \Delta_2} b_\beta c_\gamma (\beta, \gamma) \leq 0,$$

um absurdo, de modo que Δ é de fato linearmente independente, ou seja, um sistema simples de raízes.

Resta apenas mostrar a validade da desigualdade 2.1. Como sistemas de raízes são invariantes pelas reflexões que estas geram, dadas raízes α, β , devemos ter $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$ (com $c = 2(\beta, \alpha) / (\alpha, \alpha)$) uma raiz. Note que negarmos a desigualdade 2.1 é equivalente a assumirmos $c > 0$.

Suponha então $c > 0$. Vamos mostrar que $s_\alpha(\beta)$ não pode ser raiz positiva, nem negativa, um absurdo.

Suponha que $s_\alpha(\beta)$ seja raiz positiva:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \in \Delta, \gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma, \quad c_\gamma \geq 0,$$

Se $c_\beta < 1$, temos que

$$\beta = \frac{c}{1 - c_\beta} \alpha + \sum_{\gamma \in \Delta, \gamma \neq \beta} \frac{c_\gamma}{1 - c_\beta} \gamma,$$

é combinação linear positiva de elementos de $\Delta \setminus \{\beta\}$, contradizendo a minimalidade de Δ . Por outro lado, se tivéssemos $c_\beta \geq 1$, teríamos

$$(c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \in \Delta, \gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma = 0.$$

Mas sendo todas as raízes envolvidas positivas e todos os coeficientes não negativos, deveríamos ter todos os coeficientes nulos, em particular, $c = 0$, um absurdo.

Falta mostrar o absurdo de assumirmos que $s_\alpha(\beta)$ seja raiz negativa. Este caso segue de modo semelhante, devemos apenas considerar os casos $c + c_\alpha > 0$ e $c + c_\alpha \leq 0$.

□

O teorema acima demonstra a relação biunívoca existente entre sistemas positivos e sistemas simples de raízes. Além disto, é claro que, dados um sistema de raízes positivas Π e um sistema simples $\Delta \subset \Pi$, para todo elemento $w \in W$, temos que $w(\Delta)$ é um sistema simples contido em $w(\Pi)$, se considerarmos uma ordem que torne $w(\Pi)$ sistema de raízes positivas. Iremos demonstrar que todo sistema positivo (ou simples) pode ser obtido desta forma, ou seja, estes são todos permutados pela ação de W .

Lema 2.3.0.4 *dado um sistema simples $\Delta \subset \Pi$, se $\alpha \in \Delta$ então $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.*

Demonstração: Basta demonstrar que $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) \subset \Pi \setminus \{\alpha\}$, pois ambos os conjuntos são finitos de mesma cardinalidade. Seja então $\alpha \neq \beta \in \Pi$. Expressamos $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$, com $c_\gamma \geq 0$ e algum $c_\gamma > 0, \gamma \neq \alpha$. Aplicando a reflexão s_α obtemos

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Mas sabemos que, ao expressar alguma raiz como combinação linear de raízes simples, todos os coeficientes envolvidos tem o mesmo sinal. Assim, como um dos coeficientes c_γ é positivo, todos os demais também devem ser positivos, de modo que $s_\alpha(\beta)$ é de fato uma raiz positiva. Além disto, esta raiz não pode ser α , pois $\alpha = s_\alpha(-\alpha)$, de modo que $s_\alpha(\beta) \in \Pi \setminus \{\alpha\}$. \square

Teorema 2.3.0.5 *Dados dois sistemas positivos $\Pi, \Pi' \subset \Phi$, existe $w \in W$ tal que $w(\Pi) = \Pi'$. Dados dois sistemas simples $\Delta, \Delta' \subset \Phi$, existe $w \in W$ tal que $w(\Delta) = \Delta'$.*

Demonstração: Devido a relação biunívoca entre sistemas positivos e simples, basta demonstrar a afirmação para sistemas positivos. Vamos fazê-lo por indução sobre $r = \#(\Pi \cap -\Pi')$ ³.

Se $r = 0$ então $\Pi = \Pi'$ e nada temos a demonstrar. Suponha $r > 0$. Não podemos ter $\Delta \subset \Pi'$, pois isto implicaria em termos $\Pi = \Pi'$. Seja então $\alpha \in \Delta \cap -\Pi'$. O lema anterior nos garante que $\#(s_\alpha(\Pi) \cap -\Pi') = r - 1$ e a hipótese de indução nos garante a existência de $w \in W$ tal que $w(s_\alpha(\Pi)) = \Pi'$, ou seja, $ws_\alpha(\Pi) = \Pi'$. \square

Nossa meta final neste capítulo é classificar os grupos finitos de reflexão que é feito, essencialmente, estudando-se os sistemas simples de raízes. No que se segue, mostraremos que um grupo finito de reflexões é gerado por um sistema simples de raízes, e entenderemos as relações entre estas raízes.

Seja β uma raiz e $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ sua decomposição relativa a um sistema simples Δ . Chamamos $al(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$ de **altura** de β relativa a Δ .

Teorema 2.3.0.6 *Dado um sistema simples de raízes Δ , $W = \langle s_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$.*

³O símbolo $\#$ denota simplesmente a cardinalidade do conjunto em questão.

Demonstração: Seja $W' = \langle s_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$. Queremos mostrar que $W' = W$. Considere a órbita $W'(\beta)$ de uma raiz positiva β . Esta órbita intercepta o sistema de raízes positivas Π (pois $\beta \in \Pi$). Seja então um elemento $\gamma \in W'(\beta) \cap \Pi$ de altura mínima. Se expressarmos $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, temos que, sendo γ raiz positiva, cada $c_\alpha \geq 0$. Mas

$$0 < \langle \gamma, \gamma \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \langle \gamma, \alpha \rangle,$$

de modo que para algum α teremos $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$. Afirmamos que $\gamma = \alpha$. De fato, se isto não ocorresse, teríamos que $s_\alpha(\gamma)$ seria uma raiz positiva. Mas $s_\alpha(\gamma) = \gamma - c\alpha$, com $c > 0$, de modo que $\text{al}(s_\alpha(\gamma)) = \text{al}(\gamma) - c < \text{al}(\gamma)$. Mas γ pertence a órbita $W'(\beta)$ e $s_\alpha \in W'$, de modo que $s_\alpha(\gamma) \in W'(\beta) \cap \Pi$, contradizendo a minimalidade da altura de γ .

Sabendo que a órbita de qualquer raiz positiva intercepta o sistema simples de raízes, temos que $\Pi \subset W'\Delta$. O mesmo vale para raízes negativas. De fato, se β for negativa, temos que $-\beta$ é positiva, e portanto existem $w \in W'$ e $\alpha \in \Delta$ tais que $w(\alpha) = -\beta$, donde segue que $\beta = -w(\alpha) = w(-\alpha) = ws_\alpha(\alpha)$.

Assim, ao considerarmos um gerador s_β de W , encontramos $w \in W'$ e $\alpha \in \Delta$ tais que $\beta = w(\alpha)$ e obtemos que $s_\beta = ws_\alpha w^{-1} \in W'$ e segue que $W' = W$. \square

Vimos no lema 2.3.0.4 como a reflexão determinada por uma raiz simple age em um sistema positivo de raízes. Queremos estudar este tipo de fenômeno para elementos genéricos $w \in W$. Fixamos um sistema positivo de raízes, Π , e definimos

$$\begin{aligned} n(w) &= \#(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) \\ &= \text{número de raízes positivas levadas por } w \text{ em raízes negativas.} \end{aligned}$$

Algumas propriedades elementares desta função são expressas pelo lema a seguir:

Lema 2.3.0.7 *Seja Π sistema de raízes positivas, $\Delta \subset \Pi$ sistema simples, $\alpha \in \Delta$ e $w \in W$.*

1. $n(\alpha) = 1$, para $\alpha \in \Delta$.
2. $n(w^{-1}) = n(w)$.

$$3. w(\alpha) > 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) + 1.$$

$$4. w(\alpha) < 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) - 1.$$

Demonstração:

1. Segue imediatamente do lema 2.3.0.4.

2. Como

$$\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = w^{-1}(w(\Pi) \cap -\Pi) = -w^{-1}(w(-\Pi) \cap \Pi)$$

e w age como permutação de raízes, temos que

$$\begin{aligned} n(w^{-1}) &= \#(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) \\ &= \#(w(-\Pi) \cap \Pi) \\ &= n(w). \end{aligned}$$

3. Se $w(\alpha) > 0$, então o lema 2.3.0.4 garante que

$$\Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi) = s_\alpha(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) \overset{\circ}{\cup} \{\alpha\}$$

de modo que $n(ws_\alpha) = \#(\Pi \cap s_\alpha w^{-1}(-\Pi)) = n(\alpha) + 1^4$.

4. Segue de modo análogo ao anterior.

□

Proposição 2.3.0.8 *Fixe um sistema simples Δ . Sabemos que todo elemento $w \in W$ pode ser expresso como produto $s_1 \cdots s_r$ de reflexões determinadas por raízes simples ($s_i = s_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Delta$). Suponha que $n(w) < r$. Então, existem índices $1 \leq i < j \leq r$ tais que:*

$$1. \alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j);$$

$$2. s_{i+1}s_{i+2} \cdots s_j = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}.$$

Demonstração:

⁴O símbolo $\overset{\circ}{\cup}$ significa "união disjunta" de conjuntos.

1. Para algum j , devemos ter $(s_1 s_2 \cdots s_{j-1})(\alpha_j) < 0$. De fato, se isto não ocorresse, o ítem 6.6 do lema 2.3.0.7 implicaria em termos $n(w) = r$. Mas $\alpha_j > 0$, de modo que, para algum $1 \leq i < j$, devemos ter $(s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j) < 0$, enquanto $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j) > 0$. Mas se s_i leva a raiz positiva $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j)$ em uma raiz negativa, o lema 2.3.0.4 nos garante que $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})(\alpha_j)$.
2. Denotando $\alpha = \alpha_j$ e $w' = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$, o fato de termos $w'(\alpha) = \alpha_i$ implica em $w' s_\alpha w'^{-1} = s_{w'(\alpha)} = s_{\alpha_i}$. Multiplicando ambos os lados a direita por w' obtemos que $w' s_{\alpha_j} = s_{\alpha_i} w'$, por seja,

$$s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_j = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}. \quad (2.2)$$

□

Esta proposição nos permite obter palavras reduzidas a partir de palavras arbitrárias. Chamamos a atenção que este é um feito extremamente notável, que no final das contas permite a classificação dos grupos finitos de reflexão. Todo aquele que já tentou determinar se alguma palavra em algum grupo dado é ou não reduzida, mesmo nos casos mais simples, reconhecerá a importância deste resultado.

Corolário 2.3.0.9 (Condição de Cancelamento) *Seja Δ sistema simples e $w = s_1 s_2 \dots s_r$ uma expressão de w em termos de raízes simples. Se $s_1 s_2 \dots s_r$ não for palavra mínima (ou seja, se $|w| < r$), então existem $1 \leq i < j \leq r$ tais que*

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_r.$$

Demonstração: Segue imediatamente da proposição que

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_r$$

se $n(w) < r$, bastando multiplicar ambos os lados da equação 2.2 por s_j a direita. Para concluirmos basta mostrarmos que $n(w) = |w|$. De fato, o lema 2.3.0.7 nos garante que $n(w) \leq |w|$. Se tivéssemos $n(w) < |w| = r$, bastaria expressarmos w como uma palavra de comprimento r . A proposição nos permitiria cancelar dois geradores da palavra, contradizendo o fato de r ser a norma de w . □

Acabamos de ver que $|w| = n(w) = \#(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))$. Podemos então pensar se é possível relacionar as raízes em $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ em função dos geradores que aparecem em um expressão reduzida $w = s_1 \cdots s_r$. Esta relação é explicitada pelo seguinte lema:

Proposição 2.3.0.10 *Se $w = s_1 \cdots s_r$ for uma palavra reduzida em termos de raízes simples, então $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ é definida por*

$$\beta_1 = s_r \cdots s_2(\alpha_1), \beta_2 = s_r \cdots s_3(\alpha_2), \dots, \beta_{r-1} = s_r(\alpha_r), \beta_r = \alpha_r.$$

Demonstração: Sendo $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ e $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ conjuntos de mesma cardinalidade, basta mostrarmos que $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) \subseteq \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$. Consideremos então $\beta \in \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$. Como $\beta > 0$ mas $w(\beta) = s_1 \cdots s_r(\beta) < 0$, existe i tal que $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) > 0$ e $s_i \cdots s_r(\beta) < 0$. Como s_i leva a raiz positiva $s_{i+1} \cdots s_r(\beta)$ em uma raiz negativa, temos que $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) = \alpha_i$ e conseqüentemente $\beta = s_r \cdots s_{i+1}(\alpha_i) = \beta_i$. Segue que $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$. \square

Esta proposição pode ser reformulada do seguinte modo:

Proposição 2.3.0.11 (Condição de Troca) *Seja $w = s_1 \cdots s_r$ uma expressão em termos de reflexões simples e s uma reflexão simples. Então, se $|ws| < |w|$, existe i tal $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r s$, ou seja, podemos trocar s_i por s . Em particular, w possui expressão reduzida terminada em s se e somente se $|ws| < |w|$.*

Demonstração: Basta repetirmos o argumento do lema 2.3.0.7 para a expressão $ws = s_1 \cdots s_r s$, tomando $j = r + 1$ na demonstração do item 6.6 e aplicar a condição de cancelamento (corolário 2.3.0.9). \square

Se considerarmos um sistema simples de raízes $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, vimos que as reflexões $S_\Delta = \{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ são suficientes para gerar o grupo W , ou seja, $W = \langle S_\Delta \rangle$. Denotemos por $m(\alpha, \beta)$ a ordem do elemento $s_\alpha s_\beta$. Obviamente, o conjunto $R_\Delta = \left\{ (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1 | \alpha, \beta \in \Delta \right\}$ é um conjunto de relações válidas para o grupo W . As condições de cancelamento e de troca nos permitem dar uma passo fundamental para a classificação dos grupos finitos de reflexão: mostrar que estas são as únicas relações necessárias para determinar W , ou seja:

Teorema 2.3.0.12 *Dado um sistema simples Δ de raízes de um grupo de reflexões finito W , então $W = \langle S_\Delta | R_\Delta \rangle$, ou seja, W é sujeito apenas as relações*

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1; \quad \alpha, \beta \in \Delta. \quad (2.3)$$

Demonstração: Faremos uma demonstração direta (e um tanto informal) de que toda relação

$$s_1 s_2 \cdots s_r = 1; \quad s_i = s_{\alpha_i} \text{ para algum } \alpha_i \in \Delta \quad (2.4)$$

em W decorre das relações dadas, no sentido de poderem ser expressas como produto das relações 2.3 ou conjugadas a estas. Começamos observando que r deve ser par, pois $\det(s_i) = -1$ para cada i . Escrevendo $r = 2q$, podemos demonstrar o resultado por indução sobre q .

Para $q = 1$ obtemos $s_1 s_2 = 1$ e, como $s_1 = s_1^{-1}$, temos que $s_2 = 1$, ou seja, temos na realidade a equação $s_1 s_1 = 1$, uma das relações definidas em 2.3.

Vejam os o que acontece no caso $r = 2q$. Naturalmente, a relação

$$s_1 \cdots s_{q+1} s_{q+2} \cdots s_r = 1$$

é equivalente a relação

$$w := s_1 \cdots s_{q+1} = s_{2q} \cdots s_{q+2}. \quad (2.5)$$

Observe que a palavra da direita que representa w é a composição de $q - 1$ geradores de modo que, a palavra da esquerda $s_1 \cdots s_{q+1}$ não pode ser reduzida. Podemos então aplicar o item (b) da proposição 2.3.0.8: existem índices $1 \leq i < j \leq q + 1$ tais que

$$s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}, \quad (2.6)$$

ou seja,

$$s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1} = 1. \quad (2.7)$$

Se substituirmos 2.6 na equação 6.6, obtemos

$$\begin{aligned} s_1 \cdots s_i (s_{i+1} \cdots s_j) s_{j+1} \cdots s_r &= s_1 \cdots s_i (s_i \cdots s_{j-1}) s_{j+1} \cdots s_r \\ &= s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_r = 1. \end{aligned}$$

Observe que, por hipótese de indução (esta equação envolve no máximo $r - 2 = 2(q - 1)$ geradores), esta relação decorre das relações básicas em

2.3. Se além disto a equação 2.7 também decorrer das relações básicas, podemos concluir a demonstração. Mas, se esta envolver menos que r geradores, podemos usar novamente a hipótese de indução, de modo que resta apenas o caso em que 2.7 envolve exatamente $r = 2q$ símbolos, ou seja, quando $i = 1$ e $j = q + 1$, de modo que 2.6 se escreve como

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_1 \cdots s_q. \quad (2.8)$$

Para resolvermos este impasse, consideramos a relação $s_2 \cdots s_r s_1 = 1$, obviamente equivalente a relação original (para tanto, basta conjugar por $s_1 = s_1^{-1}$ ambos os termos da igualdade $s_1 s_2 \cdots s_r = 1$). Repetindo os mesmos passos, poderemos concluir o resultado a menos que tenhamos

$$s_3 \cdots s_{q+2} = s_2 \cdots s_{q+1}. \quad (2.9)$$

Se este for o caso, reescrevemos esta relação como

$$s_3 (s_2 \cdots s_{q+1}) s_{q+2} s_{q+1} \cdots s_4 = 1.$$

Repetimos o mesmo argumento e resolvemos nosso problema a menos que tenhamos

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_q. \quad (2.10)$$

Mas, das equações 2.8 e 2.10 decorre que

$$s_1 s_2 s_3 \cdots s_q = s_3 s_2 s_3 \cdots s_q$$

donde segue que $s_1 = s_3$.

Prosseguimos deste modo, repetindo os passos já feitos, mas considerando as permutações cíclicas subsequentes da relação inicial

$$s_2 s_3 \dots s_r s_1 = 1, \quad s_3 s_4 \dots s_1 s_2 = 1, \dots, \quad s_r s_1 \dots s_{r-1} = 1$$

Feito isto, em cada uma das etapas procedemos como anteriormente, colocando, na etapa k ,

$$s'_1 = s_k, \dots, s'_{r-k} = s_r, s'_{r-k+1} = s_1, \dots, s'_r = s_{k-1}$$

e obtemos que, ou podemos escrever a relação $s'_1 s'_2 \dots s'_r = 1$ (obviamente equivalente a relação inicial 6.6) como combinação das relações originais, ou, obtemos que $s'_1 = s'_3$, isto é, $s_2 = s_4$. Prosseguindo desta forma temos que,

ou em alguma etapa conseguimos mostrar o pretendido, ou então completamos todas as $r = 2q$ permutações cíclicas de 6.6 sem conseguirmos concluir. No entanto, este impasse é resolvido se notarmos que, nesta circunstância obtemos que

$$s_1 = s_3 = \cdots s_{r-1}, \quad s_2 = s_4 = \cdots s_r,$$

e a nossa relação original 2.4 adquire a forma

$$(s_1 s_2)^q = s_1 s_2 s_1 s_2 \cdots s_1 s_2 = 1, \quad (2.11)$$

e segue que, colocando $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \alpha_2$, q deve ser múltiplo de $m(\alpha, \beta)$, ou seja, a relação 2.11 decorre da relação básica $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$. \square

Observação 2.3.0.13 *Dadas duas raízes α e β , podemos considerar o plano $H_{\alpha, \beta}$, gerado por α e β . Claramente, este plano é invariante por s_α e s_β . Não é difícil ver que $m(\alpha, \beta)$ é não apenas a ordem de $s_\alpha s_\beta$ como também a de sua restrição ao plano $H_{\alpha, \beta}$. Restringindo-nos a este plano não é difícil ver que, a menos de substituirmos alguma destas raízes por sua oposta, temos que $\pi/m(\alpha, \beta) = \pi - \angle(\alpha, \beta)$, onde $\angle(\alpha, \beta)$ é o ângulo entre as raízes.*

2.3.1 Exercícios

1. Seja Φ um sistema de raízes em \mathbb{R}^n e H um hiperplano tal que $H \cap \Phi = \emptyset$. Sejam H^+ e H^- os semi-espacos definidos por H , $\Phi^+ = \Phi \cap H^+$ e $\Phi^- = \Phi \cap H^-$. Mostre que existe ordem lexicográfica em \mathbb{R}^n tal que Φ^+ é sistema de raízes positivas e Φ^- sistema de raízes negativas.
2. Mostre que $\{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ é sistema de raízes de D_n . Determine sistema simples associado.
3. Mostre que $al(\beta) = 1$ se e somente se $\beta \in \Delta$.
4. Seja Δ sistema simples de raízes de W . Mostramos que $W = \langle s_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$, ou seja, que Δ gera W . Mostre que este conjunto é um conjunto minimal de geradores de W , ou seja, se $\Delta' \subset \Delta$ e $W = \langle s_\alpha | \alpha \in \Delta' \rangle$, então $\Delta' = \Delta$.
5. Demonstre o último item do lema 2.3.0.7.
6. Mostre que $\det(w) = (-1)^{n(w)}$.

7. Mostre que $n(ww') \equiv n(w) + n(w') \pmod{2}$.
8. Dadas duas raízes positivas α e β , mostre que $m(\alpha, \beta) = 2\pi - 2\angle(\alpha, \beta)$.

2.4 Classificação dos Grupos Finitos

Seja $W = \langle S|R \rangle$ um grupo finito de reflexões, sendo S é um conjunto gerador de reflexões. Cada reflexão é determinada por um hiperplano, que por sua vez é determinado e determina dois vetores unitários ortogonais. O conjunto destes vetores forma um conjunto invariante por W , chamado de sistema de raízes Φ . A priori, podemos incluir em S todas as reflexões de W , mas vimos na seção anterior (teorema 2.3.0.6) que W é gerado pelas reflexões determinadas por um sistema simples de raízes Δ . Além disto, vimos que o grupo é completamente determinado pelas relações $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$, $\alpha, \beta \in \Delta$.

Para classificar os grupos finitos de reflexão, consideramos três objetos associados a estes. Na realidade, estes objetos são equivalentes, um claramente determinado pelos outros, mas por conveniência técnica e mneumônica definimo-os como objetos distintos.

O primeiro deles é a **matriz de Coxeter** de W , definida por $M = M_W = (m(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in \Delta}$. Esta matriz depende da escolha do sistema simples de raiz Δ e quando houver necessidade de explicitar o sistema de raiz, denotaremos $M_W = M_{W, \Delta}$. Obviamente, esta matriz determina completamente as relações do grupo e portanto, dado um sistema de geradores, W está bem determinado pela matriz M . A matriz de Coxeter tem as seguintes propriedades⁵:

⁵Na realidade, matriz semelhante pode ser definida para qualquer grupo finitamente gerado, onde $m(\alpha, \beta)$ é o menor inteiro positivo tal que $(\alpha\beta)^{m(\alpha, \beta)} = \text{Id}$ e convencionarmos que $m(\alpha, \beta) = \infty$ no caso de não existir tal inteiro, ou seja, se $\alpha\beta$ for um elemento de ordem infinita. O fato de o grupo ser gerado por reflexões implica em termos os elementos da diagonal $m(\alpha, \alpha) = 1$ e, como consequência, em termos $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$, ou seja, na matriz ser simétrica. O fato de o grupo ser finito implica em todo elemento ter ordem finita, de modo que em nenhuma entrada da matriz aparece o símbolo ∞ .

De modo geral, um grupo abstrato finitamente gerado G , que admite uma apresentação da forma $G = \langle s_\alpha; \alpha \in \Delta | (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1 \rangle$ com $m(\alpha, \beta)$ satisfazendo as três propriedades citadas é chamado de **Grupo de Coxeter**: finito se $m(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, infinito se algum $m(\alpha, \beta) = \infty$. Os grupos de Coxeter finitos são exatamente aqueles que apre-

1. M é simétrica, pois $s_\beta s_\alpha = (s_\alpha s_\beta)^{-1}$ e elementos inversos tem a mesma ordem.
2. A diagonal é igual a 1, pois $(s_\alpha s_\alpha)^1 = 1$.
3. Os elementos fora da diagonal são estritamente maiores do que 1, pois $(s_\alpha s_\beta) = 1$ implica em termos $\alpha = \beta$.

Antes de apresentarmos os exemplos, lembramos que vimos na observação 2.3.0.13 que $\pi/m(\alpha, \beta) = \pi - \angle(\alpha, \beta)$.

Exemplo: $[\mathbf{A}_n]$ Consideremos o sistema de raízes simples dado por $\Delta = \{e_i - e_{i+1} | i = 1, \dots, n\}$. Verificamos diretamente que

$$\cos \angle(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \frac{(e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2})}{|e_i - e_{i+1}| |e_{i+1} - e_{i+2}|} = \frac{-1}{2}$$

e

$$\cos \angle(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{(e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1})}{|e_i - e_{i+1}| |e_j - e_{j+1}|} = 0$$

se $|j - i| > 1$ de modo que

$$m(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 3, \quad m(\alpha_i, \alpha_j) = 2 \text{ se } |j - i| > 1$$

e a matriz de Coxeter do grupo A_n é dada por

$$M_{A_n} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo: $[\mathbf{B}_n]$ Considerando base usual de \mathbb{R}^n e o sistema simples de raízes

$$\Delta = \{e_i - e_{i+1}, e_n | i = 1, \dots, n - 1\},$$

sentaremos neste capítulo, de modo que não se acrescenta muito à teoria partindo-se do caso de um grupo abstrato, apesar de a classificação ser possível sem considerarmos os elementos absolutamente terrenos que temos aqui: planos euclidianos, hiperplanos, ângulos entre vetores.

constatamos que

$$\begin{aligned} (e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1}) &= -1 \text{ se } |j - i| = 1 \\ (e_i - e_{i-1}, e_j - e_{j-1}) &= 0 \text{ se } |j - i| > 1 \\ (e_{n-1} - e_n, e_n) &= -1 \\ (e_i - e_{i+1}, e_n) &= 0 \text{ se } i < n - 1 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_i, \alpha_{i+1}) &= \frac{(e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2})}{|e_i - e_{i+1}| |e_{i+1} - e_{i+2}|} = -\frac{1}{2} \text{ se } i + 1 < n \\ \cos(\alpha_i, \alpha_j) &= 0 \text{ se } |i - j| > 1 \\ \cos(\alpha_{n-1}, \alpha_n) &= \frac{(e_{n-1} - e_n, e_n)}{|e_{n-1} - e_n| |e_n|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} m(\alpha_i, \alpha_{i+1}) &= 3 \text{ se } i + 1 < n, \quad m(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ &= 4, \quad m(\alpha_i, \alpha_j) = 2 \text{ se } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

e obtemos

$$M_{B_n} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo: $[D_n]$ Considerando base usual de \mathbb{R}^n e o sistema simples de raízes

$$\Delta = \{e_i - e_{i+1}, e_{n-1} + e_n | i = 1, \dots, n - 1\},$$

constatamos que

$$\begin{aligned}
(e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1}) &= -1 \text{ se } |j - i| = 1 \\
(e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1}) &= 0 \text{ se } |j - i| > 1 \\
(e_{n-1} + e_n, e_{n-1} - e_n) &= 0 \\
(e_{n-1} + e_n, e_{n-2} - e_{n-1}) &= -1 \\
(e_{n-1} + e_n, e_j - e_{j+1}) &= 0 \text{ se } j < n - 2
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_i, \alpha_{i+1}) &= \frac{(e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2})}{|e_i - e_{i+1}| |e_{i+1} - e_{i+2}|} = -\frac{1}{2} \text{ se } i < n - 1 \\
\cos(\alpha_i, \alpha_j) &= 0 \text{ se } |i - j| > 1 \\
\cos(\alpha_n, \alpha_{n-1}) &= \frac{(e_{n-1} + e_n, e_{n-1} - e_n)}{|e_{n-1} + e_n| |e_{n-1} - e_n|} = 0 \\
\cos(\alpha_n, \alpha_{n-2}) &= \frac{(e_{n-1} + e_n, e_{n-2} - e_{n-1})}{|e_{n-1} + e_n| |e_{n-2} - e_{n-1}|} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
m(\alpha_{n-2}, \alpha_n) &= m(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \\
&= 3 \text{ se } i + 1 < n, \quad m(\alpha_i, \alpha_j) \\
&= 2 \text{ se } |i - j| > 1, \{i, j\} \neq \{n - 2, n\}
\end{aligned}$$

e obtemos

$$M_{D_n} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

A esta matriz, e portanto ao grupo W , associamos uma **forma bilinear de Coxeter** definida pela matriz $A = A_W = (a(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in \Delta}$ com entradas

$$a(\alpha, \beta) := \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}.$$

Esta matriz é obviamente simétrica e afirmamos que é positiva definida, ou seja, se considerarmos um vetor $x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (com $n = \dim V = |\Delta|$), então $Q(x) := x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $Q(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. De fato, podemos considerar nossas raízes como tendo norma 1. Feito isto, temos que $a(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ (veja observação 2.3.0.13), de modo que A nada mais é que a matriz que representa, relativamente a base Δ , o produto interno euclidiano usual, ou seja, se ordenarmos as raízes simples colocando $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e expressarmos

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \zeta_i \alpha_i$$

então

$$\langle x, y \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a(\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & a(\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & a(\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}.$$

Por analogia, diremos que uma matriz quadrada $M = (m_{ij})$ é **positivo definida** (positiva semi-definida) se a forma bilinear associada $A = (\cos(\pi/m_{ij}))$ for positiva definida (positiva semi-definida).

Este fato é importante para vermos que na realidade, a matriz de Coxeter, ou a forma bilinear de Coxeter determinam o grupo em um sentido bastante forte:

Teorema 2.4.0.1 *Sejam W_1 e W_2 grupos finitos de reflexões de V_1 e V_2 respectivamente, ambos com ação essencial. Sejam Δ_i sistema simples ordenado de raízes, M_{W_i} a matriz de Coxeter de W_i determinada por Δ_i e $O(V_i)$ o grupo das transformações ortogonais de V_i para $i = 1, 2$. Se existe matriz $C \in O(V_1)$ tal que $CM_{W_1, \Delta_1}C^T = M_{W_2}$ então, existe isometria $T : V_1 \rightarrow V_2$ que induz um isomorfismo de W_1 em W_2 .*

Demonstração: Se denotarmos por $\{\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n}\}$ as raízes ordenadas de Δ_i , definimos T como sendo a transformação linear tal que $T(\alpha_{1,j}) = \alpha_{2,j}$, para cada raiz $\alpha_{1,j} \in \Delta_1$. Se considerarmos as raízes como tendo norma 1, temos que o ângulo entre duas raízes distintas $\alpha_{i,j}$ e $\alpha_{i,k}$ é $\pi - \pi/m(\alpha_{1,j}, \alpha_{1,k})$ de modo que

$$\langle \alpha_{1,j}, \alpha_{1,k} \rangle = -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_{1,j}, \alpha_{1,k})}, \quad \langle \alpha_{2,j}, \alpha_{2,k} \rangle = -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_{2,j}, \alpha_{2,k})}.$$

Mas por definição, $CM_{W_1, \Delta_1} C^T = M_{W_1, C \langle \Delta_1 \rangle}$ e como $C \in O(V_1)$ temos que $\langle C(\alpha_{1,j}), C(\alpha_{1,k}) \rangle = \langle \alpha_{1,j}, C_{1,k} \rangle$ e como $M_{W_1, C \langle \Delta_1 \rangle} = M_{W_2, \Delta_2}$ concluímos que

$$\langle \alpha_{1,j}, \alpha_{1,k} \rangle = \langle C(\alpha_{1,j}), C(\alpha_{1,k}) \rangle = \langle \alpha_{2,j}, \alpha_{2,k} \rangle = \langle T(\alpha_{1,j}), T(\alpha_{1,k}) \rangle$$

ou seja, T é uma isometria entre V_1 e V_2 . Obviamente, T induz um isomorfismo entre os grupos W_1 e W_2 . \square

Temos então que, para determinarmos os grupos finitos de reflexão, basta determinarmos as matrizes $(a_{ij})_{n \times n}$ simétricas de tipo positivo com entradas naturais, e tais que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} > 1$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Esta missão parece ser mais difícil do que realmente é. Para podermos classificá-las vamos introduzir um terceiro objeto, equivalente a matriz de Coxeter ou a forma bilinear associada, chamado de **grafo de Coxeter** ou **diagrama de Dinkyn**.

Definição 2.4.0.2 *Um grafo de Coxeter é um grafo (não orientado), com arestas ponderadas por inteiros $m \geq 3$ ou pelo símbolo ∞*

Observe que grafos e matrizes de Coxeter são objetos equivalentes, ou seja, podemos construir um único grafo a partir de uma matriz e esta matriz pode ser reconstruída de modo único a partir do grafo. Também podemos associar a um grafo de Coxeter uma forma bilinear simétrica de Coxeter. A associação entre matrizes de Coxeter e grafos é feita do seguinte modo: Dada matriz $M = (m(\alpha_i, \alpha_j))_{i,j=1,\dots,n}$ construímos um grafo com n vértices, um para cada $\alpha_i, i = 1, \dots, n$. dois vértices associados a α_i e α_j são ligados por uma aresta se e somente se $m(\alpha_i, \alpha_j) \geq 3$. Ponderamos cada aresta por $m = m(\alpha_i, \alpha_j)$. Como o caso $m(\alpha_i, \alpha_j) = 3$ acaba sendo muito freqüente, omitimos o símbolo $m = 3$ na representação gráfica do grafo. Obviamente, podemos de modo similar associar uma matriz a um grafo de Coxeter pelo processo inverso: Numeramos os n vértices do grafo e construímos a matriz $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ onde m_{ij} é o peso da aresta ligando o i -ésimo ao j -ésimo vertice, $m_{ij} = 2$ se não existe aresta ligando estes vértices e $m_{ii} = 1$.

Podemos resumir estas correspondências do seguinte modo:

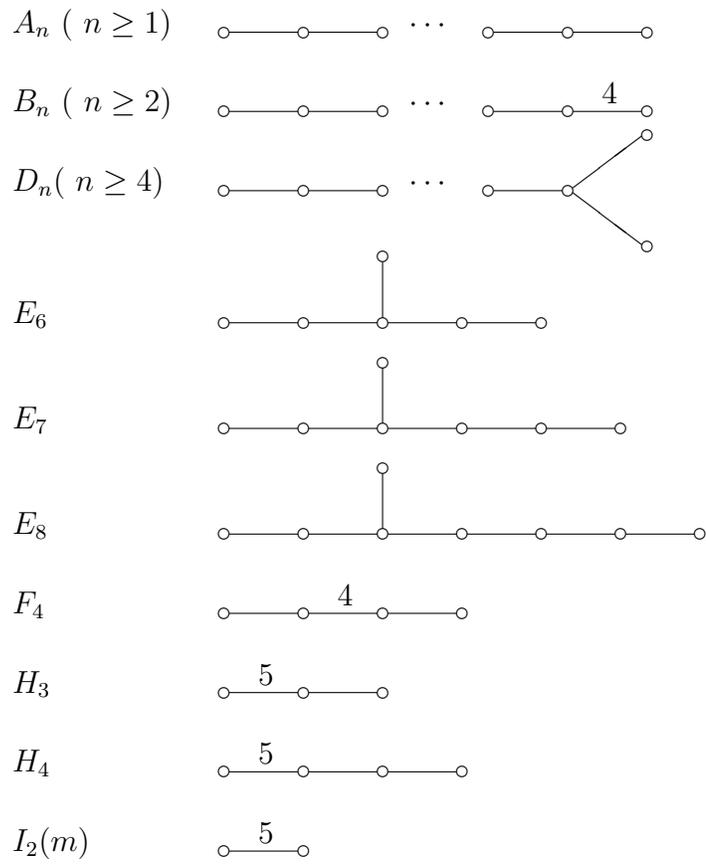
Objeto \ Objeto associado e isomorfismo	Matriz	Forma	Grafo
Matriz de Coxeter	$M; \text{Id}$	$A_M; \Omega_{MF}$	$\Gamma_M; \Omega_{MG}$
Forma de Coxeter	$M_A; \Omega_{MF}^{-1}$	$A; \text{Id}$	$\Gamma_A; \Omega_{FG}$
Grafo de Coxeter	$M_\Gamma; \Omega_{MG}^{-1}$	$A_\Gamma; \Omega_{FG}^{-1}$	$\Gamma; \text{Id}$

e estas associações são canônicas e únicas, definidas por bijeções de modo que

$$\Omega_{MF} \circ \Omega_{FG} = \Omega_{MG}; \quad \Omega_{MG} \circ \Omega_{FG}^{-1} = \Omega_{MF}; \quad \Omega_{FG} \circ \Omega_{MG}^{-1} = \Omega_{MF}^{-1}.$$

Por analogia ao que ocorre com formas bilineares, dizemos que um grafo de Coxeter Γ é **positivo definido** (ou **positivo semidefinido**) se M_Γ assim o for. Diremos que o grafo é **do tipo positivo** se este for positivo definido ou semi-definido. Como as formas de Coxeter associadas a grupos finitos de reflexão são sempre positivo definidas, os grafos de Coxeter associados a grupos finitos de reflexão são sempre positivo definidos. Esta bijeção entre grafos e matrizes, junto com o teorema 2.4.0.1, nos dizem que, classificar os grupos finitos de reflexão é equivalente a classificarmos os grafos de Coxeter de tipo positivo.

Dizemos que um grafo de Coxeter é **conexo**, se o for no sentido topológico usual, bastando considerarmos cada aresta isométrica a um intervalo, ou seja, se dados dois vértices quaisquer estes puderem ser ligados por uma seqüência de arestas. Suponha que o grafo de Coxeter de um grupo W tenha duas componentes conexas Γ_1 e Γ_2 . Dados vértices $\alpha_i \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$, então, devemos ter $m(\alpha_1, \alpha_2) = 2$, de modo que o ângulo entre as raízes, dado por $\cos(\pi/m(\alpha_1, \alpha_2))$ é igual a $\pi/2$. Temos então que a forma bilinear de Coxeter associada a W é dada pela matriz $A_W = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ou seja, as raízes pertencentes a Γ_1 e a Γ_2 geram subespaços complementares ortogonais, que denotamos por $\langle \Gamma_i \rangle = \{ \sum_{\alpha \in \Gamma_i} x_\alpha \alpha \mid x_\alpha \in \mathbb{R} \}$. Se denotarmos por $W_i = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Gamma_i \rangle$ o subgrupo de W gerado pelas reflexões associadas a raízes em Γ_i ($i = 1, 2$), temos que $\langle \Gamma_1 \rangle$ é invariante pela ação de Γ_1 e de Γ_2 , assim como o espaço Γ_2 . Temos então que, na realidade, o grupo W pode ser identificado isomorficamente com o produto direto $W_1 \oplus W_2$. Assim, ao tentarmos classificar os grupos finitos de reflexão, basta classificarmos os grupos **indecomponíveis**, ou seja, os grupos que não podem ser expressos como soma direta de grupos não triviais. Antes de procedermos a classificação propriamente dita, devemos introduzir uma família de grafos de tipo positivo:



Antes de mais nada, devemos demonstrar que estes diagramas são de fato diagramas positivo definidos. Conforme observamos anteriormente, um diagrama associado a um grupo finito de reflexões W é positivo definido. Vamos então demonstrar que estes são de fato grafos associados a grupos finitos de reflexões.

As três primeiras famílias são associadas respectivamente aos grupos A_n, B_n e D_n . Para vê-lo, basta comparar os grafos com as matrizes de Coxeter nos exemplos 2.4,2.4 e 2.4 respectivamente. Vamos realizar os grupos relativos aos outros casos de modo um tanto que esquemático, exibindo sistemas simples de raízes. Apenas lembramos que, assim como feito anteriormente, consideramos $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Lembramos ainda que, dadas raízes α e β , vale a igualdade

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} = -\cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}.$$

E₆ Consideramos base ortonormal $\{e_1, \dots, e_8\}$ de \mathbb{R}^8 e as raízes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8), & \alpha_2 &= e_2 - e_1, \\ \alpha_3 &= e_3 - e_2, & \alpha_4 &= e_4 - e_3, & \alpha_5 &= e_5 - e_4, & \alpha_6 &= e_6 - e_5. \end{aligned}$$

Obviamente, para $i, j \geq 2$, temos que

$$-\cos \frac{\pi}{m(\alpha_i, \alpha_j)} = \begin{cases} -1/2 & \text{se } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{se } |i - j| > 1 \end{cases}$$

de modo que

$$m(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 3 & \text{se } |i - j| = 1 \\ 2 & \text{se } |i - j| > 1 \end{cases}.$$

De modo similar, verificamos que

$$-\cos \frac{\pi}{m(\alpha_1, \alpha_i)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 4 \\ 1/2 & \text{se } i = 4 \end{cases}$$

de modo que

$$m(\alpha_1, \alpha_i) = \begin{cases} 2 & \text{se } i \neq 4 \\ 3 & \text{se } i = 4 \end{cases}.$$

Obtemos assim a matriz de Coxeter

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e o grafo correspondente é de fato o grafo \mathcal{E}_6 da figura 2.4.

E₇ e E₈ Segue quase que do mesmo modo que no anterior. Apenas que, no caso E_7 acrescentamos a raiz $\alpha_7 = e_7 - e_8$ e no caso E_8 , além desta, acrescentamos a raiz $\alpha_8 = e_8 - e_7$.

F₄ Consideramos base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$ de \mathbb{R}^4 e as raízes simples

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), & \alpha_2 &= e_1, \\ \alpha_3 &= e_2 - e_1, & \alpha_4 &= e_3 - e_2 \end{aligned}$$

obtendo que

$$\begin{aligned} -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_1, \alpha_i)} &= \begin{cases} -1/2 & i = 2 \\ 0 & i = 3, 4 \end{cases} \\ -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_2, \alpha_i)} &= \begin{cases} \sqrt{2}/2 & i = 3 \\ 0 & i = 4 \end{cases} \\ -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_3, \alpha_4)} &= 1/2 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} m(\alpha_1, \alpha_i) &= \begin{cases} 3 & i = 2 \\ 2 & i = 3, 4 \end{cases} \\ m(\alpha_2, \alpha_i) &= \begin{cases} 4 & i = 2 \\ 2 & i = 3, 4 \end{cases} \\ m(\alpha_3, \alpha_4) &= 3 \end{aligned}$$

obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e o grafo correspondente \mathcal{F}_4 (figura 2.4).

H₃ Tomando um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 definido por uma base ortonormal, consideramos o sistema de raízes

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3, \quad \alpha_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$$

$$\begin{aligned} -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_1, \alpha_2)} &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_1, \alpha_3)} &= 0 \\ -\cos \frac{\pi}{m(\alpha_2, \alpha_3)} &= -1/2 \end{aligned}$$

I₂(m) Consideramos as raízes

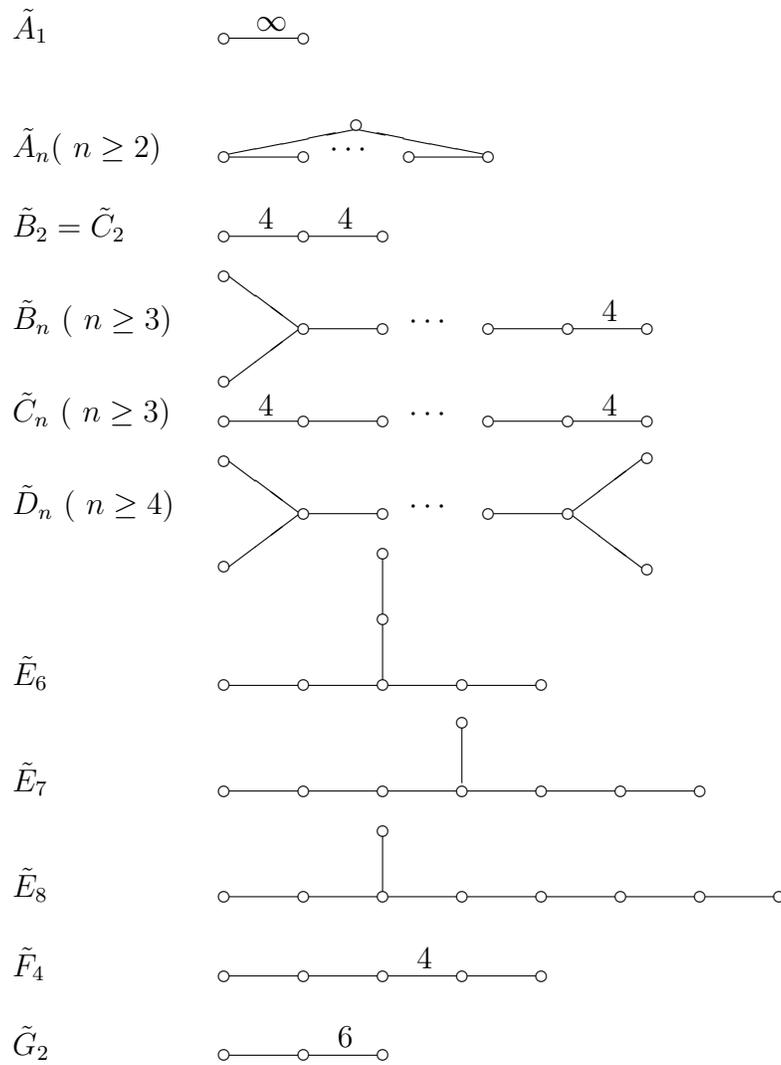
$$\alpha_1 = e_1, \quad \alpha_2 = -\cos \frac{\pi}{m} e_1 + \sin \frac{\pi}{m} e_2$$

e obtemos que

$$-\cos \frac{\pi}{m(\alpha_1, \alpha_2)} = -\cos \frac{\pi}{m}$$

de modo a termos $m(\alpha_1, \alpha_2) = m$ e de fato, o grafo de $I_2(m)$ é o grafo $\mathcal{I}_2(m)$ da figura 2.4.

Tendo visto que todos estes grafos estão associados a grupos finitos de reflexão, para classificar os grupos finitos de reflexão, devemos apenas mostrar que estes são todos os grafos de Coxeter positivo definidos. Para fazê-lo, precisamos como construção auxiliar, determinar uma família de grafos de Coxeter positivos semi-definidos. Consideramos os grafos representados pelos diagramas a seguir.



Teorema 2.4.0.3 *Os grafos da figura 2.4 são todos positivos semi-definidos, ou seja, a forma bilinear associada a eles é positiva semi-definida.*

Demonstração: Os grafos na figura 2.4 são todos obtidos a partir dos grafos da figura 2.4 pelo acréscimo de um único vértice ou, equivalentemente, se excluirmos um vértice conveniente de um grafo da lista 2.4 obtemos um grafo da lista 2.4. Em termos da forma bilinear A_Γ , estamos afirmando que, com a escolha apropriada de algum $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, a exclusão da i -ésima linha e da i -ésima coluna da forma A_Γ associada a um grafo da lista 2.4 nos leva a uma forma de Coxeter associada a um dos grafos da lista 2.4. Como as formas associadas a primeira lista de grafos são todas positivas definidas, para mostrarmos que uma forma associada a um grafo da segunda lista é positiva semi-definida, basta demonstrar que seu determinante é 0.

A forma bilinear associada a \tilde{A}_n tem determinante nulo pois a soma das colunas de \tilde{A}_n é nula, ou seja, os vetores coluna são linearmente independente. Já no caso \tilde{A}_1 , temos que a forma bilinear associada é determinada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \pi & \cos 0 \\ \cos 0 & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

onde estamos assumindo, por definição, que uma ligação com peso ∞ corresponde a um ângulo nulo.

Seja então Γ um grafo da segunda lista distinto de \tilde{A}_1 e \tilde{A}_n . Podemos enumerar seus vértices de modo que o último vértice seja aquele que necessitamos retirar para obter um grafo da primeira lista. Podemos constatar que esta escolha pode ser feita de tal modo que este vértice se conecta a apenas um outro vértice adicional, ligado por uma aresta de peso 3 ou 4 (no caso de \tilde{C}_n). Se considerarmos a forma associada $2A_\Gamma$ obtemos então que ela é do tipo

$$2A_\Gamma = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & (2A'_\Gamma) & & 0 \\ & & & & c \\ 0 & \cdots & 0 & c & 2 \end{pmatrix},$$

onde $2A'_\Gamma$ é forma bilinear associada a um dos grupos Γ' da primeira lista, obtido a partir de Γ pela exclusão do vértice apropriado e $c = 1$ se este vértice estiver ligado por uma aresta de peso 3 e $c = 2$ no caso de estar ligado a Γ' por um vértice de peso 4. Expandindo o determinante pela última linha ou

coluna e examinando-o caso a caso, verificamos que de fato $\det(2A_\Gamma) = 0$ e concluímos que os grafos correspondentes são de fato positivo semi-definidos. \square

Entendemos por subgrafo um grafo Γ' obtido a partir de Γ através da composição de uma ou mais vezes das duas operações seguintes:

1. Podemos excluir um vértice de Γ e junto com este vértice as arestas que lhe são adjacentes.
2. Podemos diminuir o peso de alguma aresta de Γ .

A classificação dos grafos de Coxeter pode ser feita utilizando-se repetidas vezes a seguinte proposição:

Proposição 2.4.0.4 *Seja Γ um grafo de Coxeter de tipo positivo. Então, todo subgrafo Γ' distinto de Γ é não apenas do tipo positivo, mas positivo definido.*

A demonstração desta proposição não chega a ser difícil, mas a omitiremos neste texto. Pode ser encontrada em [Hu, Seção 2.6].

Teorema 2.4.0.5 (Classificação dos Grafos de Coxeter Positivos) *Os grafos das figuras 2.4 e 2.4 são os únicos grafos de Coxeter conexos do tipo positivo.*

Demonstração: Suponha que exista um grafo de Coxeter conexo Γ que não conste das figuras 2.4 ou 2.4. Mantenha as duas figuras a vista. Iremos utilizar a proposição acima em diversos pequenos passos de modo a obtermos uma contradição. Iremos utilizar esta proposição tantas vezes que nos daremos a liberdade de se referir a ela simplesmente como "a proposição".

Vamos então supor que Γ possui $n \geq 1$ vértices e que o peso máximo de suas arestas é $m \leq \infty$. Siga os passos com atenção:

1. O único grafo possível com um vértice é o grafo A_1 . Os únicos grafos possíveis com dois vértices também constam das listas exibidas, são $I_2(n)$ ou \tilde{A}_1 . Logo, o número de vértices de Γ é $n \geq 3$.
2. Não podemos ter \tilde{A}_1 como subgrafo de Γ , pois \tilde{A}_1 não é positivo definido, e isto contradiria a proposição. Temos então que $m < \infty$.

3. Como \tilde{A}_n não é positivo definido, não pode ser um subgrafo de Γ , pois contradiríamos a proposição. Logo, como assumimos que $\Gamma \neq \tilde{A}_n$, Γ não contém circuitos fechados, ou seja, é uma árvore.
4. Observe que Γ não pode ter nenhuma aresta com peso maior ou igual a seis. De fato, se isto ocorresse, lembrando que $n \geq 3$, eliminando vértices e subtraindo peso, teríamos \tilde{G}_2 como subgrafo de Γ , contradizendo a proposição. Logo, $m \leq 5$.

Suponha agora que $m = 3$. Estamos supondo que todos os vértices tem peso 3.

5. Γ deve ter algum ponto de bifurcação, pois do contrário teríamos $\Gamma = A_n$.
6. Γ pode conter no máximo um ponto de bifurcação, pois do contrário possuiria um \tilde{D}_n como subgrafo, contradizendo a proposição.
7. Como a proposição garante que Γ não contém \tilde{D}_4 como subgrafo, Γ não pode possuir ponto de bifurcação com 4 ou mais arestas. Temos que o ponto de bifurcação de Γ é ponto de encontro de exatamente 3 arestas. Temos então um único ponto de bifurcação em Γ e deste ponto partem 3 arestas. Suponha que na direção de cada uma destas arestas Γ tenha respectivamente a, b, c vértices. **Vamos assumir que $a \leq b \leq c$.**
8. Não podemos ter \tilde{E}_6 como subgrafo de Γ , de modo que ao menos em alguma destas 3 direções existe apenas um vértice, ou seja, $a = 1$.
9. De modo similar, não podemos ter \tilde{E}_7 como subgrafo de Γ , de modo que $b \leq 2$.
10. Se b fosse igual a 1, teríamos $\Gamma = D_n$, um absurdo. Logo, $b = 2$.
11. Recordemos que, partindo do ponto de bifurcação temos, em uma primeira direção exatamente $a = 1$ vértice e numa segunda direção $b = 2$ vértices. Como \tilde{E}_8 não pode ser subgrafo de Γ , devemos ter $c \leq 4$.
12. Como $2 = b \leq c \leq 4$, temos que $c = 2, 3$ ou 4 . Estes casos corresponderiam a Γ ser E_6, E_7 ou E_8 respectivamente, um absurdo. Logo, não podemos ter $m = 3$.

Vamos assumir agora que $m = 4$, ou seja, que Γ possui ao menos um vértice com peso 4 e nenhum vértice com peso maior do que 4. Lembre ainda que estamos assumindo que Γ possui ao menos 3 vértices. Além disto Γ não possui circuitos fechados.

13. Γ não pode possuir três vértices, pois os únicos grafos com três vértices, com uma aresta de peso 4 e a outra de peso 3 ou 4 são os grafos B_3 e \tilde{B}_2 contidos nas nossas listas. Logo, $n \geq 4$.
14. Γ não pode ter duas arestas com peso 4, pois isto implicaria em termos \tilde{B}_2 como subgrafo de Γ , no caso de estas arestas serem consecutivas, ou \tilde{C}_{n-1} no caso de estas não serem consecutivas, ambas as possibilidades contradizendo a proposição.

Temos que Γ possui ao menos 4 vértices, exatamente uma aresta com peso 4 e todas as outras com peso 3.

Suponha que a aresta com peso 4 seja uma aresta extrema.

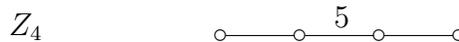
15. Se Γ não possui bifurcação, $\Gamma = B_n$, um absurdo, pois Γ não pertence a nenhuma das listas.
16. Se Γ possui alguma bifurcação temos que $\Gamma = \tilde{B}_3$ se $n = 4$ ou Γ possui algum \tilde{B}_k como subgrafo, no primeiro caso contradizendo nossas hipóteses e no segundo a proposição.

Suponha que a aresta com peso 4 não é extrema.

17. Neste caso, temos que Γ é igual ou contém \tilde{F}_4 como subgrafo, novamente um absurdo.
18. Concluimos assim que não podemos ter $m = 4$.

Supomos agora que $m = 5$ e $n \geq 3$.

19. Se existe uma aresta de Γ com peso $m = 5$ que não seja extrema, então Γ possui um subgrafo



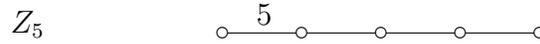
o que é impossível pois a forma bilinear determinada por este grafo é dada pela matriz

$$A_{Z_4} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -\cos \frac{\pi}{5} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{5} & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

que é indefinida pois possui auto-valor negativo

$$\lambda = -\frac{9}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}\sqrt{(22 + 2\sqrt{5})}.$$

20. Se $n \geq 5$, Γ possui subgrafo igual a



o que é impossível, pois a forma bilinear associada a Z_5 é determinada pela matriz

$$A_{Z_5} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{5} & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

que não é do tipo positiva, pois tem -1 como autovalor.

21. Mas, se $n = 3$ ou 4 temos $\Gamma = H_3$ ou H_4 respectivamente, contradizendo nossa hipótese.

Como excluímos todas as possibilidades, chegamos a um absurdo, ou seja, todo grafo de Coxeter do tipo positivo esta listado nas figura 2.4 ou 2.4. \square

Capítulo 3

Estrutura Simplicial

Seja W um grupo finito de reflexões, agindo em V de modo essencial. Considere Φ um sistema completo de raízes. Cada hiperplano $H_\alpha, \alpha \in \Phi$ divide V em dois semi-espacos abertos. O conjunto

$$V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$$

é constituido de várias componentes conexas (mais adiante poderemos dizer com segurança quantas), cada uma delas um conjunto aberto e poliedral¹. Começaremos este capítulo estudando propriedades genéricas de conjuntos poliedrais construidos deste modo e mais tarde voltaremos aos grupos de finitos de reflexão.

De modo mais geral, sejam $f_i : V \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ funcionais lineares não nulos. Para cada i , a equação linear homogênea $f_i(x) = 0$ determina um hiperplano H_i^0 , conjunto de soluções da equação, o qual delimita dois semi-espacos: H_i^+ e H_i^- , os semi-espacos em que f_i assume respectivamente valores positivos e negativos. Sob o ponto de vista topológico, H_i^0 é o bordo de cada um dos H_i^\pm e o fecho de cada semi-espaco é denotado por $\overline{H_i^\pm} = H_i^0 \cup H_i^\pm$.

Note que cada hiperplano H_i^0 determina um funcional f_i e este funcional é único a menos de multiolos por escalares não nulos. Observe que, cada componente conexa de $V \setminus \bigcup_{i=1}^k H_i^0$ é perfeitamente caracterizada pela escolha

¹Neste contexto, podemos assumir a definição (mais fraca) de ser conexa or caminhos, ou seja, uma componente conexa C é um conjunto maximal relativo a seguinte propriedade: dados $x, y \in C$, existe caminho contínuo $c : [0, 1] \rightarrow C$ tal que $c(0) = x$ e $c(1) = y$. Neste caso particular, teremos que estas componentes serão *convexas* o que nos permite afirmar a posteriori que o segmento de reta ligando os dois pontos está contido em C , ou seja, o caminho $c(t) = tx + (1-t)y$ está contido em C .

de k símbolos $+$ ou $-$, feita do seguinte modo: a um ponto x associamos o conjunto ordenado de símbolos $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ com $\varepsilon_i = +$ se $f_i(x) > 0$ e $\varepsilon_i = -$ se $f_i(x) < 0$. Outro modo de enunciar esta afirmação é que cada componente conexa de $V \setminus \cup UH_i$ é imagem inversa de um ponto do conjunto $\{+, -\}^n$ pela aplicação acima. Cada uma destas componentes conexas é chamada de **célula** de dimensão $n = \dim(V)$, também chamada de célula de dimensão máxima ou codimensão 0. De modo geral, uma célula é determinada pela escolha de sinais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$, com $\varepsilon_i = +, -$ ou 0 . O conjunto dos pontos ao qual associamos o mesmo conjunto de sinais é a intersecção $\cap_{i=1}^k H_i^{\varepsilon_i}$ e tem dimensão $n - r$, onde r é o número de ε_i nulos. Dizemos então que $A = \cap_{i=1}^k H_i^{\varepsilon_i}$ é uma **célula de dimensão** $n - r$, ou codimensão r . Se os vetores ortogonais aos espaços H_i^0 formarem um conjunto gerador de V , temos que existe uma e apenas uma **célula de dimensão mínima**, $A = \{0\}$. As células determinam uma partição de V em **cones**, conjuntos convexos de vetores, fechados pela soma e pelo produto por escalares positivos.

O **suporte** de uma célula A é o menor subespaço L_A que a contém, que é nada mais que o subespaço determinado pelas equações $f_i(x) = 0$, com i percorrendo o conjunto I_A de índices para os quais $\varepsilon_i = 0$. Note que, como sub-conjunto de L_A , A é determinado por desigualdades estritas $\varepsilon_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_A$, de modo que A é um subconjunto aberto de L_A^2 .

Dizemos que uma célula A é face de uma aresta B se A puder ser obtida de B a partir da substituição de um conjunto (eventualmente vazio) de desigualdades $f_i = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \neq 0$ por igualdades $f_i = 0$. Em outras palavras, dizemos que A é face de B se $I_B \subseteq I_A$. Denotamos esta relação por $A \leq B$. O número de novas igualdades introduzidas, $\sharp(I_A - I_B)$, é a codimensão de A em B .

O fecho \overline{A} de uma célula A é obtido substituindo-se todas as desigualdades estritas $f_i > 0$ ou $f_i < 0$ por desigualdades não estritas $f_i \geq 0$ ou $f_i \leq 0$ respectivamente. Chamamos \overline{A} de **célula fechada**. Segue da definição que $\overline{A} =_{B \leq A} \overline{B}$. Como as células são disjuntas, temos que $B \leq A$ se e somente se $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Em particular, $B = A$ se e somente se $\overline{B} = \overline{A}$ e temos que a associação $A \mapsto \overline{A}$ é uma bijeção.

Exemplo: Considere o grupo $I_2(n)$, o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados. Este grupo determina n retas de reflexão. Temos então

²Abusamos da notação e dizemos que $f_i = \varepsilon_i$ é uma desigualdade, sempre que $\varepsilon_i \neq +, -$, assumindo que a desigualdade é $f_i(x) > 0$ se $\varepsilon_i = +$ e $f_i(x) < 0$ se $\varepsilon_i = -$. De modo similar, entendemos que $f_i = \varepsilon_i$ significa $f_i(x) = 0$ se $\varepsilon_i = 0$.

n células de dimensão 2, $2n$ células de dimensão 1 e uma célula de dimensão 0. \square

Proposição 3.0.0.6 *Seja A uma célula aberta. Então:*

1. \bar{A} é o fecho topológico de A em V .
2. Considerado como subconjunto do fecho L_A , temos que A é o interior de \bar{A} .

Demonstração: Exercício. \square

Uma descrição ingênua das faces é dizer que cada uma delas é constituída pelos pedaços de plano (de dimensão $n - r$) que formam a fronteira topológica da célula dada. Uma descrição geométrica mais acurada é dada pela proposição:

Proposição 3.0.0.7 *Seja A uma célula. Dois pontos $y, z \in \bar{A}$ pertencem a mesma face de A se e somente se existir um segmento aberto contido em \bar{A} e contendo ambos y e z .*

Demonstração: Suponha que $y, z \in B \leq A$. Cada igualdade $f_i = \varepsilon_i$ é válida em todo o segmento fechado $[y, z]$, pois cada uma delas determina um conjunto convexo contendo tanto y como z . Mais ainda, cada uma destas equações continua válida em um intervalo aberto (y_i, z_i) suficientemente pequeno contendo $[y, z]$. Como o número de equações é finito, se considerarmos a intersecção $\bigcap_{i=1}^k (y_i, z_i)$, obtemos um segmento aberto contendo $[y, z]$ e contido na mesma face B . Reciprocamente, suponha que y e z estejam em faces distintas de A . Existe um i relativo ao qual os pontos se comportam de modo distinto, ou seja, apenas um dos pontos anula a função f_i . Suponha que $f_i(y) > 0$ e $f_i(x) = 0$. Se prolongarmos o segmento $[y, z]$ na direção de y , este muda imediatamente de sinal, ou seja, se $[y, z] \not\subset [y', z]$, então $f_i(y') < 0$, de modo que $y' \notin \bar{A}$, ou seja, \bar{A} não contém qualquer segmento aberto que contenha $[y, z]$. \square

3.1 Estrutura de Cômodos

Considere um sistema de células construído como na seção anterior: consideramos Φ um sistema de raízes e $\mathcal{H} = \{H_\alpha | \alpha \in \Phi\}$. As células de dimensão máxima são então as componentes conexas de $V \setminus_{H \in \mathcal{H}} H$.

Dentre outras coisas, introduziremos nesta seção uma linguagem arquitetônica, apropriada ao estudo de edifícios de Tits. Chamaremos uma célula de dimensão máxima de **cômodo**. Dado um cômodo C , dizemos que um subconjunto $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ define C se pudermos defini-lo apenas pelas desigualdades $f_i = \varepsilon_i$ com $H_i \in \mathcal{H}'$. Dado um cômodo C , existe um conjunto minimal $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ que define C . Enumeremos estes hiperplanos $\mathcal{H}' = \{H_1, \dots, H_k\}$. Consideramos $H_i \in \mathcal{H}'$ e supomos, sem perda de generalidade, que C é definido por inequações $f_j > 0$, $j = 1, \dots, k$ (se alguma das inequações for $f_j < 0$ substituímos $f_j(x)$ por $-f_j(x)$). Dado $i \in \{1, \dots, k\}$, o conjunto definido pelas equações $f_i = 0, f_j > 0, j \in ki = \{1, \dots, \hat{i}, \dots, k\}$ é não vazio. De fato, da minimalidade de \mathcal{H}' segue que as desigualdades $f_j > 0, j \in ki$ definem um conjunto C' estritamente maior do que C . Assim, se tomarmos $x \in C$ e $y \in C' \setminus C$, devemos ter $f_i(x) > 0$ e $f_i(y) < 0$. Logo, podemos tomar $z \in [x, y]$ para o qual $f_i(z) = 0$. Ao tomarmos todos os pontos obtidos desta maneira, obtemos uma face A do cômodo C . Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3.1.0.8 *Existe um unico subconjunto minimal $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ que define um cômodo C . Os elementos de \mathcal{H}' são os planos suportes de faces de codimensão 1 de C .*

Chamamos então os elementos de \mathcal{H}' de **paredes** de C . De modo geral, chamaremos cada elemento de \mathcal{H} de parede. É fácil verificar que um hiperplano $H \in \mathcal{H}$ é uma parede de C se e somente se estiver contida em um único semi-espaco definido por H e se $\overline{C} \cap H$, como subconjunto de H , tiver interior não vazio. Assumiremos, a menos de menção em contrário, que se \mathcal{H}' for o conjunto de paredes de C , então C é definido pelas desigualdades $f_i > 0, i = 1, \dots, r$ e os hiperplanos H_i de \mathcal{H}' são definidos por $f_i = 0, i = 1, \dots, k < r$.

Diremos que \mathcal{H} é **essencial** se $W = \langle s_H | H \in \mathcal{H} \rangle$ for essencial, ou seja, se tivermos $V_0 := \sum_{i=1}^r H_i = \{0\}$. Podemos sempre assumir que \mathcal{H} é essencial, pois se isto não ocorresse teríamos que os funcionais f_i estariam bem definidos no quociente $V_1 = V/V_0$, definindo hiperplanos e células em bijeção com os hiperplanos e células de V .

Assumimos pois \mathcal{H} essencial. Se considerarmos a intersecção apenas das paredes de um cômodo dado, devemos ter $_{H \in \mathcal{H}} H = \{0\}$, pois esta é a única célula de dimensão 0, portanto, deve ser uma face de C , podendo então ser determinada pelas paredes que determinam C .

Temos assim que o número k de paredes de um cômodo é maior ou igual a dimensão n de V . Diremos que o cone C é **simplicial** se $n = k$.

Proposição 3.1.0.9 *Assuma \mathcal{H} essencial e C um cômodo. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. C é simplicial.
2. Existe uma base e_1, \dots, e_n de V tal que $C = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0\}$.
3. Os funcionais f_1, \dots, f_k formam uma base do espaço dual V^* .

Demonstração: Como estamos assumindo que \mathcal{H} é essencial, temos que $_{H \in \mathcal{H}} H = \{0\}$, ou seja, as equações $f_1 = f_2 = \dots = f_k = 0$ admite uma única solução e a equivalência entre 1 e 3 é imediata.

Assumimos então a validade das afirmações 1 e 3. Temos que $\{f_1, \dots, f_n\}$ uma base de V^* e considramos a base dual $\{e_1, \dots, e_n\}$. Segue que

$$f_i(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_i > 0$$

para todo i se e somente se tivermos $C = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0\}$, ou seja, a afirmação 2 é válida.

Reciprocamente, se assumimos que $C = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0\}$, fica fácil constatar que suas faces (de codimensão 1) são determinadas pelas igualdades $\lambda_i = 0$, de modo que C tem exatamente n faces e portanto n paredes, ou seja, C é simplicial. \square

Considere então um cômodo C e suas paredes $H_i, i = 1, \dots, n$, determinadas pelas desigualdades $f_i = \varepsilon_i$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\varepsilon_i = +$, ou seja, que as inequações que determinam C são $f_i > 0$. Se C for simplicial, temos que $\{f_1, \dots, f_n\}$ é uma base de V . A base dual $\{e_1, \dots, e_n\}$ é determinada pelas equações $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, e a menos de multiplicar cada f_i por uma constante positiva, podemos assumir que $\|e_i\| = 1$. Temos então que cada e_i é um vetor unitário perpendicular a H_i^0 , apontando na direção do semi-espaço que contém o cômodo C .

Proposição 1 *Assuma \mathcal{H} essencial. Então, se $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ para $i \neq j; i, j = 1, \dots, k$, o cômodo C é simplicial.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\{e_1, \dots, e_k\}$ é linearmente independente. Suponha que $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$ com coeficiente não todos nulos e separe os coeficientes positivos dos negativos, obtendo

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) e_j,$$

onde assumimos $\lambda_i \geq 0$ e $\lambda_j < 0$. Temos então que todos os coeficientes devem ter o mesmo sinal, pois do contrário teríamos

$$0 < \langle v, v \rangle = \sum_{l \in L, j \in J} -\lambda_l \lambda_j \langle e_l, e_j \rangle \leq 0.$$

Vamos então supor que todos os coeficientes são não negativos. Se algum deles for não nulo, podemos escrever

$$e_j = \sum_{i \in I, i \neq j} \frac{-\lambda_i}{\lambda_j} e_i$$

com cada $-\lambda_i/\lambda_j \leq 0$. Mas isto é incompatível com termos $f_j(e_j)$ positivo, pois $f_j(e_i) = \langle e_j, e_i \rangle$. \square

Corolário 3.1.0.10 *Todo cômodo determina e é determinado por um conjunto simples de raízes.*

Demonstração: Devemos apenas constatar que um conjunto de vetores unitários $\Delta = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortogonais aos hiperplanos $H_i \in \mathcal{H}$, linearmente independente e satisfazendo as desigualdades $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ é um sistema simples de raízes. \square

Corolário 3.1.0.11 *Se C for um cômodo determinado por um grupo finito de reflexões essencial W , então C é simplicial.*

3.2 Propriedades Básicas de Células

Consideramos como antes um conjunto \mathcal{H} de hiperplanos em um espaço vetorial V de dimensão n , não necessariamente essencial. Denotamos por Σ o conjunto de células determinado por \mathcal{H} , parcialmente ordenado pela relação \leq , "ser face de". Chamamos o par (Σ, \leq) de um **complexo**. Lembramos que $A \leq B$ se e somente se $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, de modo que podemos considerar o conjunto de células fechadas parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Algumas propriedades básicas de (Σ, \leq) :

Proposição 3.2.0.12 *Dados duas células $A, B \in \Sigma$, existe um limitante inferior máximo.*

Demonstração: Considere as células fechadas \bar{A} e \bar{B} . A intersecção $\bar{A} \cap \bar{B}$ também é uma célula fechada. Seja \mathcal{H}' o conjunto de todos os hiperplanos que contém $\bar{A} \cap \bar{B}$ e $H' = \bigcap_{H \in \mathcal{H}'} H$ o menor plano que a contém ($H' = V$ se $A = B$). O interior de $\bar{A} \cap \bar{B}$ em H' é a maior célula que é face de A e de B . \square

Abusamos da notação para denotar por $A \cap B$ o maior limitante inferior de A e B (a maior célula menor que A e B).

Proposição 3.2.0.13 *Toda célula A é face de algum cômodo. Se A for de codimensão 1, então A é face de exatamente dois cômodos.*

Demonstração: A célula A é determinada por um conjunto de sinais $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, com $\varepsilon_i \in \{+, -, 0\}$. Seja $y \in V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ e considere o conjunto de sinais $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ definido do seguinte modo: Se $\varepsilon_i \neq 0$, $\sigma_i = \varepsilon_i$ e do contrário, $\sigma_i = f_i(y)$, onde entendemos por $f_i(y)$ os sinais $+, -$ ou 0 de acordo com $f_i(y)$ ser $>, <$ ou $=$ a 0 respectivamente. Assim, para cada $x \in A$ e $y \in V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ e $i \in \{1, \dots, k\}$, existe $z_i \in (x, y]$ tal que $f_i(z) = \sigma_i$ se $z \in (x, z_i]$. Logo, o cômodo C definido pelos sinais $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ tem A como face, ou seja, $A \leq C$.

Se A tiver codimensão 1, apenas um dos sinais ε_i se anula, digamos $\varepsilon_1 = 0$. Assim, no máximo dois cômodos podem ter A como face, aqueles substituindo o sinal $\varepsilon_1 = 0$ por $\varepsilon_1 = \pm$. Mas sabemos que existe um cômodo C do qual A é face, obtido pela substituição de $\varepsilon_1 = 0$ por $\varepsilon_1 = f_1(y)$, com $y \in V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Se tomarmos $-y$, podemos aplicar o mesmo raciocínio, pois $-y \in V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ e com isto obtemos o outro cômodo do qual A é face. \square

Dizemos que dois cômodos C e C' são **adjacentes**, se possuírem uma face em comum A de codimensão 1, incluindo, por razões técnicas, a possibilidade de termos $C = C'$. Se $C \neq C'$, o plano suporte de A é a única parede H que separa C de C' . Em qualquer um dos casos, diremos que C e C' são **adjacentes pela parede H** .

Uma **galeria** é uma seqüência finita $\Gamma = (C_0, C_1, \dots, C_d)$, cada qual adjacente ao seu sucessor. Dizemos neste caso que Γ **conecta** o cômodo C_0 ao cômodo C_d e que d é o **comprimento** da galeria Γ . Novamente, por razões técnicas, admitimos a possibilidade de termos $C_i = C_{i+1}$.

Dados cômodos $C, D \in \Sigma$, denotamos por $l(C, D)$ o número de planos $H \in \mathcal{H}$ que separam C e D , ou seja, o número de índices para os quais o sinal em C e D difere. Definimos $l(C, D) = 0$ se $C = D$.

Proposição 3.2.0.14 *Dados cômodos $C, D \in \Sigma$, existe uma galeria de comprimento $l(C, D)$ conectando-os.*

Demonstração: Demonstraremos por indução sobre $l = l(D, C)$. Se $C = D$ nada temos a demonstrar. Se $C \neq D$, afirmamos que existe uma parede de C separando-os. De fato, C é determinado pelas inequações definidas por suas paredes e se D satisfizesse estas mesmas inequações teríamos $D \subseteq C$, um absurdo, pois sendo $C \neq D$, temos que $C \cap D = \emptyset$.

Tomamos então H uma parede de C que separa C e D . Seja A a face (de codimensão 1) de C contida em H e C' o único outro cômodo que tem A como face. Todos os planos de \mathcal{H} separam C de D separam C' de D , com exceção de H , o único elemento de \mathcal{H} que separa C de C' . Logo, $l(C', D) = l - 1$ e, por hipótese de indução existe galeria $\Gamma' = (D = C_0, C_1, \dots, C_{l-1} = C')$ conectando D a C' . Temos então que a galeria $\Gamma = (C_0, \dots, C_{l-1}, C_l = C)$ conecta os cômodos D e C . \square

A **distância combinatoria** entre dois cômodos C e D , denotada por $d(C, D)$, é o comprimento da menor galeria conectando os cômodos. Uma galeria de comprimento $d = d(C, D)$ conectando C e D é chamada de **galeria mínima**. Se H_i é uma parede comum aos cômodos C_{i-1} e C_{i+1} de uma galeria Γ , dizemos que Γ **atravessa ou cruza** a parede H_i .

Propriedade 3.2.0.15 1. *Dados cômodos $C, D \in \Sigma$, $l(C, D) = d(C, D)$.*

2. *Uma galeria mínima ligando C a D atravessa exatamente uma vez cada parede que separa C de D .*

Demonstração: Obviamente, em uma galeria mínima $\Gamma = (C_0, \dots, C_d)$ não podemos ter $C_i = C_{i+1}$, de modo que para todo i , existe um hiperplano H_i separando C_{i-1} de C_i . Como para cada i a parede H_i é única, temos que H_1, \dots, H_d são as únicas paredes que separam C de D , e conseqüentemente

$$l(C, D) \leq \#\{H_1, \dots, H_d\} \leq d = d(C, D).$$

Mas a propriedade anterior nos garante que $d(C, D) \leq l(C, D)$ e concluímos que $l(C, D) = d(C, D)$. \square

Proposição 3.2.0.16 *Se C e C' são dois cômodos distintos adjacentes, então $d(C, D) = d(C', D) \pm 1$. O sinal $+$ ocorre se e somente se C' e D estiverem do mesmo lado da parede que separa C de C' .*

Demonstração: Segue de modo inteiramente análogo a demonstração da propriedade anterior. \square

O **diâmetro** de Σ é a distância máxima entre cômodos de Σ :

$$\text{diam}(\Sigma) = \max \{d(C, D) \mid C, D \in \Sigma\}.$$

Como dois cômodos podem estar separados por no máximo $k = \#\mathcal{H}$, temos que $\text{diam}(\Sigma) \leq k$. Este limitante é de fato atingido, pois C e $-C$ são separados por todas as paredes de \mathcal{H} . Dizemos que dois cômodos são **opostos** se distarem $\text{diam}(\Sigma)$. Dado um cômodo $D \neq C$, existe uma parede que os separa, de modo que $d(C', D) < k$. Podemos resumir estes fatos na seguinte proposição:

Proposição 3.2.0.17 *O diâmetro de Σ é dado por $k = \#\mathcal{H}$. Dados cômodo C , o único cômodo oposto é $-C$.*

Em termos de sistema de raízes, como cada hiperplano determina (é determinado) por duas raízes $\{\alpha, -\alpha\} \in \Phi$, temos que $\text{diam}(\Sigma)$ é o número de raízes positivas (em alguma ordem).

3.3 A Ação de W em Σ

Como o complexo (Σ, \leq) foi definido em termos dos hiperplanos $\mathcal{H} = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$, a ação de W em V preserva a estrutura de células e a relação de ordem entre

estas, ou seja, dado $w \in W$ e $A, B \in \Sigma$, temos que $w(A) \in \Sigma$ e $A \leq B$ se e somente se $w(A) \leq w(B)$. Em outras palavras, W age como automorfismos de (Σ, \leq) . O próximo teorema estabelece a relação precisa entre W e Σ . Os dois últimos itens já foram na realidade demonstrados, mas optamos por enunciá-los em um único teorema, devido a importância deste para o restante do trabalho.

Teorema 3.3.0.18 1. *A ação de W é simplesmente transitiva sobre o conjunto de cômodos. Em particular, o número de cômodos é a ordem de W .*

2. *dado um cômodo C , o grupo W é gerado pelas reflexões nos hiperplanos que determinam C .*

3. *O conjunto de das paredes de Σ é o conjunto de todos os hiperplanos de reflexão de W .*

Demonstração: Considere C um cômodo. Mostrar que a ação de W é transitiva significa mostrar que, dado um cômodo D existe $w \in W$ tal que $w(C) = D$. Considere $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um sistema simples de raízes definidas pelas paredes que determinam o cômodo C . Se $H = H_{\alpha_i}$ é uma parede de C , e $s = s_{\alpha_i}$ é a reflexão determinada por esta então $s_{\alpha_i}(C)$ são adjacentes pela parede H . Mais ainda, para todo $w \in W$, temos que wC e wsC são adjacentes pela parede wH .

Considere agora uma família de reflexões s_1, s_2, \dots, s_d com $s_i = s_{\alpha_i}$ reflexão determinada por raiz simples $\alpha_i \in \Delta$. Temos então que

$$C, s_1C, s_1s_2C, \dots, s_1s_2\dots s_dC \quad (3.1)$$

é uma galeria (pois $s_1\dots s_{k-1}C$ e $s_1\dots s_{k-1}s_kC$ são adjacentes através da parede $s_1\dots s_{k-1}H_{\alpha_k}$) e dois cômodos consecutivos são distintos. Reciprocamente, se

$$\Gamma = (C = C_0, C_1, \dots, C_d)$$

for uma galeria com cômodos consecutivos distintos, temos que Γ é da forma 3.1. Demonstramos esta afirmação por indução sobre i . De fato, C_1 deve ser da forma $s_{\alpha_1}C$, pois as paredes de C são as paredes $H_\alpha, \alpha \in \Delta$. Suponha então que $C_i = s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_i}C$ e C_{i+1} adjacente a C_i através da parede H_j . Temos então que $s_{\alpha_i}\dots s_{\alpha_1}C_i$ e $s_{\alpha_i}\dots s_{\alpha_1}C_{i+1}$ são adjacentes através da parede

$s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} H_i$. Mas $s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} C_i = C$, de modo que devemos ter $s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} H_i$ uma parede de C , ou seja, existe $\alpha_{i+1} \in \Delta$ tal que

$$s_{i+1} C = s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} C_i = s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} C_{i+1}$$

e multiplicando-se ambos os lados por $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_i}$, obtemos que de fato, $C_{i+1} = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i+1}} C$.

Assim, esta demonstrada a transitividade da ação de W sobre os cômodos. De fato, consideramos uma galeria

$$\Gamma = (C = C_0, C_1, \dots, C_d = D)$$

conectando C a D e obtemos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \Delta$ tais que $D = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_d} C$, ou seja, a ação é transitiva.

Para mostrarmos que a ação é livre, vamos considerar $w \in W$. Seja $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_d}$ decomposição mínima de w em termos das reflexões determinadas por raízes simples. Obtemos como antes galeria $C, s_{\alpha_1} C, s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} C, \dots, s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_d} C$. A cada uma destas etapas uma parede de Σ é cruzada. Assim como fizemos anteriormente, se C_i e C_{i+1} são adjacentes através de uma parede H_i , devemos ter que $s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} H_i$ parede de C . Suponha que uma parede é atravessada duas vezes pela galeria Γ , ou seja, que existem $i < j$ tais que C_i e C_{i+1} , assim como C_j e C_{j+1} são adjacentes através de uma mesma parede H . Temos então que $s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} H = s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1} H$, donde segue que,

$$(s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_i}) (s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_{i+1}}) (s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1}) H = H,$$

ou seja, $(s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_i}) (s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_{i+1}}) (s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1})$ fixa a parede H . Consequentemente, $(s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_i}) (s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_{i+1}}) (s_{\alpha_i} \dots s_{\alpha_1})$ é uma reflexão determinada por uma raiz simples e segue que $s_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_{i+1}}$ não é palavra reduzida, impossibilitando termos $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_d}$ palavra reduzida para w , contradizendo nossa hipótese. Temos então que cada parede é cruzada uma única vez pela galeria Γ , donde segue que $d(C, wC) = l(C, wC) = d$, ou seja, $C = wC$ se e somente se $d = 0$, isto é, $w = \text{Id}$. \square

Proposição 3.3.0.19 *Seja C cômodo, Δ sistema simples de raízes determinado por C e $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_d}$ palavra reduzida. Então a galeria*

$$C, s_{\alpha_1} C, s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} C, \dots, s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_d} C \quad (3.2)$$

é uma galeria mínima ligando C a $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_d} C$. Reciprocamente, se a galeria 3.2 for mínima, então $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_d}$ é uma palavra reduzida.

Demonstração: Na realidade, a demonstração foi feita ao demonstrarmos que a ação de W é simples sobre os cômodos. \square

3.4 Exercícios

1. Demonstre a proposição 3.0.0.6.
2. Mostre que a distância combinatória é de fato uma função distância, ou seja, $\forall C, D, E \in \Sigma$:
 - (a) $d(C, D) \geq 0$ e $d(C, D) = 0$ se e somente se $C = D$.
 - (b) $d(C, D) = d(D, C)$.
 - (c) $d(C, D) \leq d(C, E) + d(E, D)$.
3. Considere os grupos finitos de reflexão de posto menor ou igual a 3 e determine o seu diâmetro.
4. Dados dois cômodos $C, D \in \Sigma$, mostre que:
 - (a) Existem pontos $x \in C$ e $y \in D$ tais que o segmento $[x, y]$ não intercepta qualquer célula de codimensão maior do que 1.
 - (b) Se x e y satisfazem a condição do item anterior, então as paredes interceptadas por $[x, y]$ são precisamente as paredes atravessadas por qualquer galeria mínima ligando C e D .
5. dado um cômodo C e célula $A \in \Sigma$, considere galerias $\Gamma = A \leq C_0, \dots, C_d = C$. Enuncie e demonstre resultado análogo ao da proposição ??, considerando $d(A, C)$ como sendo o comprimento da menor galeria conetando A e C .
6. Um subcomplexo $\Sigma' \subset \Sigma$ é um subconjunto de células que contém todas as subfaces de toda célula $A \in \Sigma'$. Seja Σ' um subcomplexo de Σ que contém ao menos um cômodo e considere o conjunto $X = \cup_{A \in \Sigma'} A \subseteq V$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
 - (a) X é convexo.

- (b) Dados $A, C \in \Sigma'$, com C cômodo, Σ' contém toda galeria minimal conectando A a C .
- (c) Para todo $A \in \Sigma'$, existe um cômodo $C \in \Sigma'$ tal que $A \leq C$ e Σ' contém toda galeria minimal ligando dois de seus cômodos.
- (d) X é a intersecção de subespaços fechados determinados pelas paredes de Σ .

Capítulo 4

Edifícios Esféricos

Quase tudo o que foi feito até o momento poderia ter sido feito de modo axiomático, abstrato. Os grupos de reflexão poderiam ter sido substituídos por grupos de Coxeter abstratos: grupos finitamente gerados por um conjunto $S_\Delta = \{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$, sujeito apenas as relações $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$, com $m(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tais que $m(\alpha, \beta) > 1$ se $\alpha \neq \beta$, $m(\alpha, \alpha) = 1$ e $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$.

Também a estrutura de células pode ser descrita de forma abstrata. Um **complexo simplicial** com conjunto de vértices \mathcal{V} é uma família Σ' de subconjuntos finitos de \mathcal{V} , chamados de simplexos, tal que:

1. Todo subconjunto unitário $\{v\} \subset \mathcal{V}$ é um simplexo.
2. dado um simplexo A , todo subconjunto $B \subseteq A$ também é um simplexo. O simplexo B é dito ser uma face de A .

Se um simplexo $A \in \Sigma'$ tem r elementos, dizemos que A tem posto r e dimensão $r - 1$. Observe que Σ' é um conjunto parcialmente ordenado pela relação de inclusão.

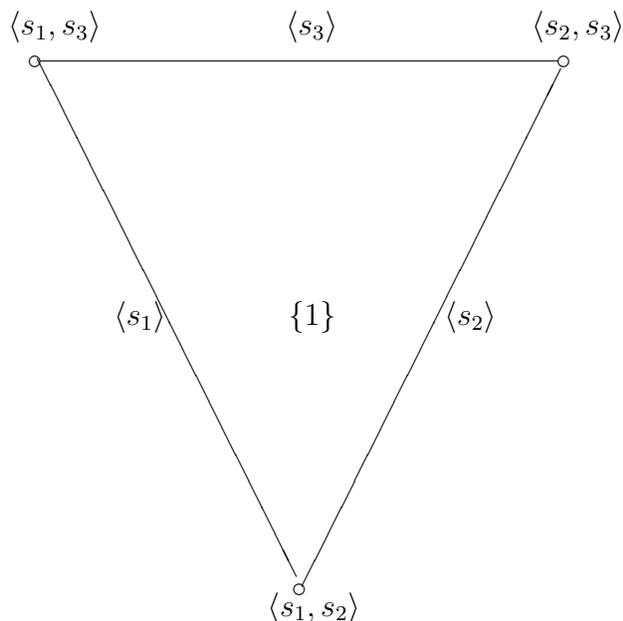
É imediato constatar que o conjunto de células Σ de um grupo de reflexões W , ordenado pela relação de ordem \leq - "é face de" - é um complexo simplicial, no sentido de (Σ, \leq) satisfazer as seguintes condições:

1. Dadas duas células $A, B \in \Sigma$, existe um maior limitante inferior $A \cap B$.
2. Dada célula $A \in \Sigma$, existe uma bijeção entre o conjunto $\{B \in \Sigma | B \leq A\}$ e o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto $\{0, \dots, r\}$ (r é a dimensão de A) preservando a ordem, se no contra-domínio considerarmos a ordem definida pela relação de inclusão.

A relação entre o grupo W e o complexo simplicial associado é rígida, podemos resgatar toda a estrutura do grupo apenas a partir da estrutura do complexo simplicial. Vamos explicar como estabelecer esta relação, sem entrar em detalhes acerca das demonstrações. Apenas para facilitar a colagem final de todos estes dados, apresentaremos-os de forma numerada.

1. Dada uma célula $A \in \Sigma$, é possível demonstrar que um elemento $w \in W$ que mantém A invariante deve manter os pontos de A (e por continuidade, também os pontos de seu fecho \overline{A}) fixos, ou seja, se $w(A) = A$ então $w(x) = x, \forall x \in \overline{A}$. Denotamos o conjunto de tais elementos, o **estabilizador** de A , por W_A .
2. Também é possível demonstrar que se A é face de um cômodo C , então W_A é gerado pelo conjunto das reflexões $\{s_\alpha | \alpha \in \Delta, A \subseteq H_\alpha\}$, ou seja, pelas reflexões de W que fixam algum (e portanto todos) ponto de A . Observe que sendo Δ o conjunto de raízes determinadas por C , todas estas reflexões são determinadas por raízes simples.
3. Os subgrupos de W gerados por subconjuntos de $S_\Delta = \{s_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ são ditos **subgrupos especiais**. Assim, construímos no item anterior uma aplicação entre o conjunto das faces de um simplexo S e os subgrupos especiais de W . Não é difícil constatar que esta aplicação é uma bijeção.
4. Se considerarmos em Σ a ordem usual \leq e no conjunto dos subgrupos de W a ordem da inclusão, a bijeção definida anteriormente reverte a ordem, ou seja, $A \leq B$ se e somente se $W_B \subseteq W_A$.

Considere o exemplo dado na figura abaixo. Consideramos o caso em que o cômodo C é um cone sobre um triângulo. Ilustramos a intersecção deste cone com um hiperplano afim e nomeamos as faces com os subgrupos especiais associados.



Falta apenas nomear a célula $\{0\}$, que identificamos com o subgrupo \emptyset .

5. Assim, se considerarmos no conjunto {subgrupos especiais} a ordem \leq_{op} , oposta a inclusão usual, temos um isomorfismo entre o complexo {faces de C, \leq } e {subgrupos especiais, \leq_{op} }.
6. Ampliamos nosso universo considerando por um lado todas as células de Σ , não apenas aquelas que são faces do cômodo C , e por outro lado considerando não apenas os subgrupos especiais, mas também classes laterais wW' destes subgrupos, chamadas de **classes laterais especiais**. Estendemos o isomorfismo acima a um isomorfismo

$$f : \{\Sigma, \leq\} \rightarrow \{\text{classes laterais especiais, } \leq_{\text{op}}\}.$$

7. Este isomorfismo é compatível com a ação de W , ou seja, dada célula $A \subseteq C, w \in W$, temos que $f(wA) = wf(A)$.
8. Para conseguirmos resgatar a estrutura de grupo a partir da estrutura de um complexo simplicial, falta definir um noção de rotulamento.

Um **rotulamento** de um complexo simplicial (Σ, \leq) é uma aplicação $\rho : \mathcal{V} \rightarrow I = \{1, \dots, n\}$ de modo que a restrição de ρ a cada simplexo maximal é uma bijeção. Dado um rotulamento, temos que cada simplexo de codimensão 1 é obtido pela exclusão de um vértice, rotulado digamos por $i \in I$, de um simplexo maximal C . Dizemos então que o simplexo tem **tipo** $I - \{i\}$. Dizemos então que dois simplexos maximais são **i -adjacentes** se possuem uma face em comum de tipo $I \setminus \{i\}$. Com o rotulamento e a estrutura de adjacência, é possível reconstruir o grupo associado ao complexo simplicial dado.

Exemplo: De modo geral, consideramos um grupo G , um subgrupo B , um conjunto de rótulos I e para cada $i \in I$ um subgrupo P_i com $B < P_i < G$. Os cômodos de Σ são então definidos como sendo as classes laterais de B . Dizemos então que gB e hB são i -adjacentes se e somente se $gP_i = hP_i$. No caso específico em que

$$G = W = \langle s_\alpha; \alpha \in \Delta \mid (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1 \rangle$$

é um grupo finito gerado por reflexões em hiperplanos associados a raízes simples $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, tomamos $B = \{1\}$ como sendo o grupo trivial, $P_i = \langle s_{\alpha_i} \rangle$ e obtemos o complexo simplicial definido nas seções anteriores. \square

Dado um complexo simplicial (Σ, \leq) definido por um grupo finito gerado por reflexões W , ele se realiza geometricamente como uma estrutura simplicial na esfera unitária $S^{n-1} \subset V$. De fato, identificamos cada célula com sua intersecção com a esfera unitária. Se considerarmos apenas as células de dimensão 1 em Σ , estas interceptam S^{n-1} em um conjunto finito de pontos. Os simplexos de dimensão máxima serão então aqueles os subconjuntos de pontos associados a faces de dimensão 1 de algum cômodo de Σ . Os outros simplexos serão subconjuntos destes.

Observe que também na esfera temos uma relação de adjacência, induzida pela relação os cômodos e faces. A partir deste momento, podemos considerar Σ como sendo o complexo simplicial determinado por W em V ou, preferencialmente, sua **realização geométrica**: sua imagem, também denotada por Σ , na esfera unitária S^{n-1} . Aliás, ao considerarmos a estrutura simplicial na esfera, os termos cômodos, paredes e afins, tornam-se mais justificáveis, pois finalmente os cômodos e companheiros tornam-se finitos, compactos, definidos por pontos que representam nada mais que os “cantos” do cômodo.

Podemos então definir, axiomáticamente um edifício, terminando por justificar a nomenclatura inspirada em conceitos básicos de construção civil. Os objetos básicos para construirmos os edifícios são apartamentos, complexos simpliciais associados a grupos finitos de reflexão em um sentido mais generalizado (associação a posteriori de modo geral, mas a priori no nosso caso). O termo edifício se justifica pelo fato de este ser construído pela justaposição de apartamentos. Passemos pois à definição:

Definição 4.0.0.20 *Um **edifício** é um complexo simplicial Ξ , que pode ser expresso como união de subcomplexos \mathcal{A} (chamados de **apartamentos**), satisfazendo os seguintes axiomas:*

- (A 0) *Cada apartamento é um complexo associado a um grupo finito de reflexões.*
- (A 1) *Dados dois simplexes $A, B \in \Xi$, existe apartamento $\Sigma \in \mathcal{A}$ contendo ambos.*
- (A 2) *Dados apartamento Σ e Σ' contendo os simplexes A e B , existe um isomorfismo de complexos $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ que fixa A e B pontualmente.*

Antes de exibirmos alguns exemplos, façamos algumas observações importantes. Antes de mais nada, poderíamos exigir no axioma A2 que o isomorfismo fixasse não apenas os simplexes A e B mas toda a intersecção $\Sigma \cap \Sigma'$. Apesar de parecer mais forte, esta condição é equivalente à condição original: suponha $f, g : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ isomorfismos, com f fixando A e B pontualmente e g fixando pontualmente toda a intersecção. Temos então que $g^{-1} \circ f$ é um automorfismo de Σ que fixa os cômodos A e B . Mas é possível mostrar que um automorfismo que fixa um cômodo é a identidade, de modo que $f = g$.

Além disto, é possível rotularmos um edifício Ξ : Considramos um cômodo C e o rotulamos de modo arbitrário por um conjunto $I = \{0, 1, \dots, n\}$. Um cômodo C' adjacente a C divide com C uma face A de codimensão 1, ou seja, C e C' partilham n dentre os $n + 1$ vértices. Assim, se o vértice de $C \setminus A$ é rotulado por i_n , rotulamos o vértice de $C' \setminus A$ também por i_n e rotulamos, de maneira similar, todo cômodo adjacente a algum cômodo já rotulado. Assim, dado um cômodo qualquer D , tomamos um apartamento Σ contendo D e C e escolhemos em Σ uma galeria $\Gamma = (C_0, \dots, C_d)$ ligando C a D . Do modo como feito acima, rotulamos sucessivamente os cômodos $C_1, C_2, \dots, C_d = D$. Este rotulamento não depende da escolha do apartamento Σ , pois o rotulamento de um apartamento é completamente determinado pelo rotulamento

de um único cômodo dado. Assim, o isomorfismo postulado no axioma A2 preserva o rotulamento. Em particular, todos os apartamentos são complexos simpliciais associados a um mesmo grupo finito de reflexões.

Assim, podemos definir uma *galeria* ligando cômodos C e C' como uma seqüência de cômodos

$$C = C_0, C_1, C_2, \dots, C_n = C'$$

onde C_i é adjacente a C_{i+1} , para todo $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Dizemos neste caso que a galeria tem comprimento n e tipo $(r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ se C_i é r_i -adjacente a C_{i+1} . Se definirmos $d_{\Xi}(C, C')$ como sendo o menor inteiro $0 \leq n$ para o qual exista galeria de comprimento n ligando C e C' , não é difícil demonstrar que temos uma métrica em Ξ .

Passemos então a um exemplo fundamental, bastante ilustrativo.

Exemplo: Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo \mathbb{F} . O plano projetivo $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ é um espaço com uma geometria de incidência definida do seguinte modo. Os pontos de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ são os subespaços vetoriais de dimensão 1 de V . As retas de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ são os subespaços vetoriais de V de dimensão 2. Denotamos os pontos de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ por letras A, B, C, \dots e as retas por l, m, r, s, \dots . Dizemos que um ponto A e uma reta l são incidentes se, como subespaços de V , tivermos $A \subset l$. O conjunto de pontos e retas de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$, com a relação de incidência, satisfaz os seguintes axiomas:

1. Dados dois pontos, existe uma reta incidente a ambos.
2. Dadas duas retas, existe um ponto incidente a ambas.
3. Existem três pontos não incidentes a uma mesma reta.
4. Existem ao menos três retas incidentes a um ponto e ao menos três pontos incidentes a uma reta.

Dizemos que três retas distintas em $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ estão em **posição geral** se estas não são incidentes a um único ponto.

Podemos dotar o espaço projetivo de uma estrutura de edifício. Os apartamentos de Ξ é a família \mathcal{A} cujos elementos são os conjuntos de três retas em posição geral, assim como os pontos incidentes a cada par de retas. Dadas três retas e os pontos incidentes a cada par delas, $\Sigma = \{l, m, n, A, B, C\}$ em posição geral, elas devem se interceptar nos pontos distintos $A = l \cap m, B =$

$m \cap n$ e $C = n \cap l$. Os cômodos de Σ são os subconjuntos de Σ constituídos de uma reta e um ponto mutuamente incidente. Temos então que os cômodos de Σ são os conjuntos

$$\{l, A\}, \{l, C\}, \{m, A\}, \{m, B\}, \{n, B\}, \{n, C\}. \quad (4.1)$$

Cada cômodo C de Σ possui duas faces de codimensão 1, os subconjuntos de C constituídos ou pela reta ou pelo ponto pertencente a C . Dois cômodos são adjacentes se possuem uma face em comum, de modo que a um cômodo existem dois tipos de adjacência: $\{l, A\}$, por exemplo, é adjacente a $\{l, C\}$ pois tem em comum a reta l e a $\{m, A\}$, pois tem em comum o ponto A . A figura abaixo retrata um apartamento de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$. Os tipos diferentes de face estão marcadas por sinais gráficos distintos.

Vamos considerarmos $GL(V)$, o grupo das transformações lineares inversíveis do espaço vetorial V . A ação de $GL(V)$ em V leva subespaços de dimensão k em subespaços de dimensão k , para $k = 0, 1, 2$ o que significa, em termos de $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$, que $GL(V)$ leva pontos em pontos e retas em retas. Mais ainda, como a ação preserva a relação de incidência, ou seja, sua ação em $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ preserva a relação de incidência, ou seja, é uma ação simplicial. Esta ação tem as seguintes propriedades:

1. Dados dois cômodos $\{l, A\}, \{m, B\} \in \Xi$, existe $T \in GL(V)$ tal que $T(\{l, A\}) = \{m, B\}$. De fato, se considerarmos bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ de V tais que $A = \mathbb{F}e_1, l = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2, B = \mathbb{F}f_1, m =$

$\mathbb{F}f_1 \oplus \mathbb{F}f_2$, então, qualquer transformação T tal que $T(e_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$ satisfaz a condição desejada: $T(A) = B, T(l) = m$.

2. Dados dois apartamentos Σ_1 e Σ_2 , e cômodos $C_i \in \Sigma_i$, existe $T \in GL(V)$ tal que $T(\Sigma_1) = \Sigma_2$ e $T(C_1) = C_2$. O apartamento Σ_i é determinado pelas retas l_i, m_i, n_i e pelos pontos A_i, B_i, C_i , $i = 1, 2$, tomados como em 4.1. Obviamente, os pontos dos apartamentos Σ_i representam subespaços unidimensionais de V , digamos que

$$A_i = \mathbb{F}a_i, B_i = \mathbb{F}b_i, C_i = \mathbb{F}c_i, \quad i = 1, 2,$$

com a_i, b_i, c_i vetores não nulos. O fato de termos as retas em posição geral é equivalente a termos $\{a_i, b_i, c_i\}$ linearmente independente. Temos então que

$$l_i = \mathbb{F}a_i \oplus \mathbb{F}c_i, m_i = \mathbb{F}a_i \oplus \mathbb{F}b_i, n_i = \mathbb{F}b_i \oplus \mathbb{F}c_i$$

de modo que, ao considerarmos uma transformação linear T definida por

$$T(a_1) = \lambda_a a_2, T(b_1) = \lambda_b b_2, T(c_1) = \lambda_c c_2$$

temos que $T(\Sigma_1) = \Sigma_2$ e $T(C_1) = C_2$.

□

Exemplo: Vamos considerar uma instância particular do caso anterior, em $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, o corpo com 2 elementos. O espaço vetorial $V = \mathbb{F}_2^3$ possui então 8 vetores. Para cada $v \neq 0$, temos que $\{v, 0\}$ é um subespaço de dimensão 1, de modo que $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ possui 7 pontos. É possível constatar que existem 7 subespaços de dimensão 2 de \mathbb{V} , de modo que também são 7 as retas de $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$. Na figura abaixo, ilustramos o edifício completo de $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$. □

4.1 Pares BN

A partir de grupos abstratos, satisfazendo determinado conjunto de axiomas (grupos conhecidos como par BN) é possível construir um edifício de Tits no qual o grupo age como automorfismos, preservando o tipo de adjacência e com transitividade forte. Este é o caminho feito por Tits e que iremos apresentar

Figura 4.1:

de forma meramente esquemática. Omitiremos os detalhes das construções assim com as demonstrações das afirmações, que podem ser encontrados em [Br, capítulo V]. No entanto, fazendo o caminho reverso, ou seja, considerando um edifício dado e um grupo de automorfismos fortemente transitivo que preserva o tipo de adjacência, mostraremos ao menos a plausibilidade destas construções e afirmações.

Nesta seção iremos considerar apenas edifícios (Ξ, \mathcal{A}) *gordos*, ou seja, edifícios em que toda parede (simplexo de codimensão 1) é face de ao menos 3 cômodos. Um grupo G de automorfismos do edifício é um grupo de isomorfismos da estrutura simplicial que mantém o conjunto \mathcal{A} dos apartamentos invariante e preserva o tipo de adjacência. Dizemos ainda que a ação de G é *fortemente transitiva* se esta for transitiva sobre o conjunto de pares (Σ, C) , onde Σ é um apartamento e C um cômodo de Σ .

Nesta seção assumiremos que o grupo de automorfismos de (Ξ, \mathcal{A}) age de maneira fortemente transitiva. Definimos W como sendo o grupo de automorfismos do apartamento Σ que preservam o tipo de adjacência e $S \subset W$ o conjunto de reflexões associadas às paredes do cômodo $C \subset \Sigma$. À ação de G em (Ξ, \mathcal{A}) associamos os seguintes grupos:

$$\begin{aligned} B &= \{g \in G \mid gC = C\} \\ N &= \{g \in G \mid g\Sigma = \Sigma\} \\ T &= \{g \in G \mid g \text{ fixa } \Sigma \text{ pontualmente}\}. \end{aligned}$$

Não é difícil constatar que:

1. T é subgrupo normal de N .
2. $W \approx N/T$.
3. $T = B \cap N$

Exemplo: Seja (Ξ, \mathcal{A}) o edifício definido no exemplo 4, em que identificamos Ξ com o plano projetivo (sobre o espaço vetorial tridimensional V), \mathcal{A} com o conjunto de triplas de retas projetivas em posição geral e os cômodos com os pares constituídos de uma reta e um ponto mutuamente incidentes em algum apartamento.

Temos então que $G = GL(V)$ age de maneira fortemente transitiva como automorfismo da estrutura simplicial, preservando o tipo de adjacência. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de V e considere o cômodo C determinado pela reta projetiva $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ e pelo ponto $\mathbb{R}e_1$ do espaço projetivo. Então temos que B pode ser identificado com as matrizes triangulares superiores

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

O grupo N pode ser identificado com as matrizes obtidas a partir de uma matriz diagonal pela permutação de linhas ou colunas, ou seja, matrizes que possuem em cada linha e cada coluna exatamente uma entrada não nula. O grupo T é o grupo dos elementos que fixam cada um dos espaços $\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2$ e $\mathbb{R}e_3$, e pode portanto ser identificado com as matrizes diagonais. Logo, $W = N/T$ é isomorfo ao grupo simétrico S_3 . Verifica-se diretamente que S é o conjunto das permutações associadas às matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Propriedades do edifício (Ξ, \mathcal{A}) traduzem-se em propriedades de G e dos grupos B, N, T e W :

1. Antes de mais nada, como G age transitivamente sobre os cômodos de Ξ com estabilizador B , podemos identificar G/B com $\{\text{cômodos de } \Xi\}$, associando à classe lateral gB o cômodo gC .

2. Seja hC um cômodo s -adjacente a C . Temos então que $h \in P_s$, o estabilizador da parede A de tipo $S \setminus \{s\}$ de C . Então, se gC e $g'C$ são dois cômodos s -adjacentes ($s \in S$), se e somente se $g' = gh$, com $h \in P_s$.
3. Dado $h \in P_s$, seja Σ' um apartamento contendo as câmaras adjacentes c e hC . Como a ação de G é fortemente transitiva, existe $b \in M$ tal que o cômodo bhC de Σ é s -adjacente a C , portanto $bhC = C$ ou sC , de modo que $bh \in H$ ou $bh \in sB$ e consequentemente, $h \in B$ ou $h \in BsB$, ou seja,

$$P_s = B \cup BsB.$$

4. A discussão acima pode ser generalizada para paredes de tipo $S \setminus S'$, onde S' é um subconjunto qualquer de S . Consideramos então o grupos $W' = \langle S' \rangle \subset W$ e obtemos que

$$P_{S'} = \bigcup_{w \in W'} BwB.$$

5. Para o caso particular de considerarmos a parede de codimensão máxima, ou seja, quando a parede A de C é definida pelo conjunto vazio, temos que $S' = S, W' = W, P_{S'} = G$ e obtemos a *decomposição de Bruhat*

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB.$$

6. É possível demonstrar ainda que o produto das classes bilaterais BwB e BsB é dado por

$$BwB \cdot BsB \subseteq BwB \cup BwsB$$

podendo ser igual a esta união, ou exclusivamente a classe $BwsB$.

Considerando grupos abstratos que possuem similares às apresentadas, Jaques Tits percorreu o caminho reverso daquele proposto por Felix Klein em seu Erlange Program: ao invés de estudar as geometrias clássicas a partir de seus grupos de automorfismos, Tits associou a um grupo G , satisfazendo seus axiomas de "par B - N " uma geometria a partir da qual podemos estudar as propriedades do grupo G .

Partimos de uma quadrupla (G, B, N, S) onde G é um grupo, B e N são subgrupos que geram G , N normaliza a intersecção $T = M \cap N$ e S é um sistema de geradores do grupo quociente $W = N/T$. Definimos $C(w) = BwB$ e $BW'B = \cup_{w \in W'} C(w)$, para um subgrupo W' de W gerado por um subconjunto $S' \subset S$ (W' é chamado de *subgrupo especial* de W). Suponha que as propriedades abaixo (que sabemos ser válidas no caso da ação fortemente transitiva de um grupo G em um edifício gordo):

1. W é grupo de coxeter e os elementos de S são todos de ordem 2 e formam um sistema simples de raízes de W .
2. $B \cup C(s)$ é subgrupo de G para todo $s \in S$.
3. $BW'B$ é subgrupo de G para todo subgrupo especial $W' \subseteq W$.
4. $G = \cup_{w \in W} C(w)$.
5. $C(s)C(w) \subseteq C(w) \cup C(sw)$, quaisquer que sejam $s \in S$ e $w \in W$.
6. Para todo $s \in S, sBs^{-1} \not\subseteq B$.

Na realidade, todas estas são conseqüência das duas últimas propriedades. Assim, definimos um par BN agregando estas propriedades:

Definição 4.1.0.21 *Um par BN é uma quadrupla (G, B, N, S) onde G é um grupo, B e N são subgrupos que geram G , N normaliza a intersecção $T = M \cap N$ e S é um sistema de geradores do grupo quociente $W = N/T$, satisfazendo as seguintes propriedades*

BN1 $C(s)C(w) \subseteq C(w) \cup C(sw)$, quaisquer que sejam $s \in S$ e $w \in W$.

BN2 Para todo $s \in S, sBs^{-1} \not\subseteq B$.

onde $C(w) = BwB$

A um par BN é possível associar um edifício. dado um subconjunto $S' \subseteq S$, consideramos o grupo $W' = \langle S' \rangle$ e definimos o isomorfismo de classes $S' \mapsto BW'B$. Chamamos os subgrupos de G da forma $BW'B$ de *grupos especiais*. É possível demonstrar que os grupos especiais são precisamente os subgrupos de G que contém B . As *classes laterais especiais* de G são as

classes da forma gP , onde $g \in G$ e P é um subgrupo especial. Ordenamos as classes especiais pela ordem reversa da inclusão: $P \leq_{\text{op}} P' \Leftrightarrow P' \subseteq P$. O *apartamento fundamental* Σ é definido como o conjunto das classes wP , onde $w \in W$ e P é subgrupo especial. Os apartamentos são então os elementos da forma $g\Sigma, g \in G$. Denotamos

$$\begin{aligned}\Xi &= \{gP \mid g \in G, P \text{ subgrupo especial}\} \\ \mathcal{A} &= \{g\Sigma \mid g \in G\}\end{aligned}$$

e é possível demonstrar que

Teorema 4.1.0.22 ([Br, capítulo V.3]) *($(\cdot, \leq_{\text{op}})$ é um complexo simplicial e (Ξ, \mathcal{A}) é um edifício de Tits gordo no qual G age de maneira fortemente transitiva como automorfismo que preserva o tipo de adjacência.*

4.2 Exercícios

1. Mostre que todos os apartamentos de um edifício são complexos associados a um mesmo grupo de Coxeter.
2. Seja (Ξ, \mathcal{A}) edifício e $A \in \Xi$ um simplexo (de dimensão qualquer). Defina o *elo* $\text{lk}_{\Xi}(A)$ de A como sendo o conjunto de todos os simplexos $B \in \Xi$ disjuntos de A para os quais $\{A, B\}$ possua limitante superior em Ξ , ou seja, exista $C \in \Xi$ com $C \geq_{\text{op}} A$ e $C \geq_{\text{op}} B$. Mostre que $\text{lk}_{\Xi}(A)$ é edifício.
3. Seja (Ξ, \mathcal{A}) edifício e $\Sigma \in \mathcal{A}$ um apartamento. Mostre que existe aplicação simplicial $\phi : \Xi \rightarrow \Sigma$, preservando tipo de adjacência, tal que $\phi|_{\Sigma} = \text{Id}$.
4. Mostre que a função $d_{\Xi}(C, C')$ definida na página 72 é de fato uma métrica.
5. Dados dois simplexos $A, B \in \Xi$, seja Σ um apartamento contendo A e B e $d_{\Sigma}(\cdot, \cdot)$ a métrica natural definida no apartamento. Mostre que $d_{\Xi}(C, C') = d_{\Sigma}(C, C')$ e conclua que o diâmetro de Ξ é igual ao diâmetro de qualquer um de seus apartamentos.
6. Dois cômodos $C, C' \in \Xi$ são ditos opostos se $d_{\Xi}(C, C') = \text{diam}(\Xi)$.

- (a) Sejam $C, C' \in \Xi$ cômodos opostos, Σ apartamento contendo ambos e D um cômodo de Σ . Mostre que existe galeria mínima (de comprimento igual a $\text{diam}(\Xi)$) entre C e C' contendo D .
- (b) Conclua que $\Sigma = \text{fecon}(C, C')$, o fecho convexo de C e C' (menor subconjunto convexo de Ξ contendo C e C').
- (c) Mostre que os apartamentos de Σ é precisamente o conjunto dos fechos convexos dos pares de (C, C') de cômodos opostos.

Capítulo 5

Edifícios Associados a Espaços Simétricos

Veremos neste capítulo como associar um edifício esférico a um espaço simétrico do tipo não compacto. Na primeira seção apresentamos as definições básicas referentes a grupos de Lie semi-simples e espaços simétricos. Na segunda seção construiremos o edifício esférico associado a tais espaços e finalmente, na última seção, esboçaremos uma demonstração do Teorema da Rigidez de Mostow que usa fortemente a estrutura de edifício.

5.1 Espaços Simétricos

Faremos uma apresentação ligeira e superficial de alguns conceitos relacionados a espaços simétricos que serão necessários. Ao leitor que não possui intimidade temos algumas sugestões. Uma introdução relativamente sucinta, capaz de familiar o leitor com os principais conceitos e resultados é o *survey* de Patrick Eberlein ([Eb]). Uma referência bem mais completa e recomendada é o já clássico texto de S. Helgason ([He]). Se o interesse do leitor for mais restrito, ao invés de um texto sugerimos um exemplo extremamente significativo, o caso do espaço simétrico $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$, que será apresentado de forma esquemática no final desta seção.

Um *espaço simétrico do tipo não compacto* é uma variedade riemanniana não compacta \mathcal{X} em que a involução geodésica¹ no ponto x , $\sigma_x : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é

¹A involução geodésica em um ponto $x \in X$ é definida do seguinte modo: dado $y \in X$ consideramos γ_{xy} a geodésica por x e y , com $\gamma_{xy}(0) = x$ e $\gamma_{xy}(t_y) = y$. Definimos então

uma isometria para todo $x \in \mathcal{X}$. Assumiremos que a fatoração de de Rahm de \mathcal{X} não possui fatores euclidianos. Nestas circunstâncias, a componente conexa da identidade do grupo de isometrias de \mathcal{X} é um grupo de Lie semi-simples real G e o estabilizador de um ponto $x_0 \in \mathcal{X}$ é um subgrupo compacto maximal K . O espaço \mathcal{X} pode ser canonicamente identificado com o espaço homogêneo G/K , onde identificamos x_0 com a classe lateral eK .

Denotamos as álgebras de Lie de G e K respectivamente por \mathfrak{g} e \mathfrak{k} . Sendo \mathfrak{g} semi-simples, a forma de Cartan-Killing

$$B(X, Y) = \text{traço}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)$$

é não degenerada. Denotamos por \mathfrak{p} o complemento ortogonal de \mathfrak{k} relativo a B e obtemos a *decomposição de Cartan* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. As seguintes propriedades são válidas:

1. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$.
2. B é positiva definida em \mathfrak{p} e negativa definida em \mathfrak{k} .
3. A aplicação $\nu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ cujas restrições a \mathfrak{k} e a \mathfrak{p} são respectivamente a identidade Id e $-\text{Id}$, é um automorfismo de álgebra conhecido como *involução de Cartan*.
4. $\langle X, Y \rangle := -B(X, \nu(Y))$ define em \mathfrak{g} uma forma quadrática positiva definida, invariante pela representação adjunta de K .

Esta última propriedade nos permite definir uma métrica G invariante em \mathcal{X} , que a menos de re-escalamento por uma constante, é a métrica original de \mathcal{X} .

A curvatura seccional é dada por $K(X, Y) = -\|[X, Y]\|^2$, para $X, Y \in \mathfrak{p}$, de modo que estamos em espaços de curvatura não positiva. Um *flat* em \mathcal{X} é definido como um subvariedade euclidiana totalmente geodésica de \mathcal{X} . A dimensão de um flat maximal é chamada de *posto* de \mathcal{X} . Estamos interessados primordialmente em espaços de posto maior que 1, ou seja, espaços com curvatura ≤ 0 , onde o limitante é atingido. Dado um flat $x_0 \in F \subset \mathcal{X}$ e dois vetores tangentes a F , $X, Y \in \mathfrak{p}$, a fórmula da curvatura mostra que $[X, Y] = 0$. Na realidade, flats maximais correspondem, através de seus espaços tangentes no ponto x_0 , a subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$: $F = Ax_0$, onde $A := \exp \mathfrak{a}$.

$$\sigma_x(y) = \gamma_{xy}(-t_y).$$

Como subálgebras abelianas maximais de \mathfrak{p} são conjugadas, temos que dados flats maximais F, F' , ambos contendo x_0 , existe isometria $g \in K$ tal que $gF = F'$.

Dado $H \in \mathfrak{a}$, consideramos a aplicação $\text{ad}H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. As aplicações $\text{ad}H$, $h \in \mathfrak{a}$ são simultaneamente diagonalizáveis, de modo que obtemos a *decomposição em espaços de raízes*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Phi} \mathfrak{g}_\lambda,$$

onde $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \lambda(H)X, \forall H \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}\}$, $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbb{R})$ e $\Phi = \{\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbb{R}) \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}, \lambda \neq 0\}$. Se considerarmos as reflexões nos hiperplanos $H_\lambda := \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) = 0\}$, obtemos um grupo de reflexões W chamado de *grupo de Weyl*. Pode-se demonstrar que este grupo é finito, de modo que cada grupo de Weyl é um grupo de Coxeter². Assim sendo, toda a estrutura de grupos de finitos de reflexão, tais como sistemas simples e positivos de raízes, a estrutura simplicial, paredes, galerias, fazem sentido neste contexto. Em particular, se considerarmos a ação natural de W em $\text{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbb{R})$ por dualidade, temos que Φ é um sistema de raízes no sentido da definição 2.3.0.2. Dado um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Phi$, para cada $\Theta \subset \Sigma$, o conjunto $\{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) = 0 \text{ se } \lambda \in \Theta \text{ e } \lambda(H) > 0 \text{ se } \lambda \in \Sigma \setminus \Theta\}$ está contido no bordo (topológico) da câmara $\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} \mid \lambda(H) > 0, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma\}$ e é chamado de *parede* de \mathfrak{a}^+ .

Os grupos de Weyl classificam as álgebras de Lie semi-simples e consequentemente também os espaços simétricos do tipo não compacto. Cada uma das componentes conexas de $\mathfrak{a} \setminus \cup_{\lambda \in \Phi} H_\lambda$, assim como suas imagens por $\text{ad}X, X \in \mathfrak{k}$, é chamada de *câmara de Weyl aberta*. Um vetor $v \in \mathfrak{p}$ é dito regular se pertencer a alguma câmara de Weyl aberta e singular do contrário. Uma geodésica em \mathcal{X} passando por x_0 é dita *regular (singular)* se está contida em um único (mais de um) flat maximal, ou equivalentemente, se seu vetor tangente em x_0 for regular (singular).

Todos os fatos e estruturas da álgebra de Lie podem ser transpostos ao grupo de Lie G pela aplicação exponencial e ao espaço simétrico $\mathcal{X} = G/K$ pela projeção $\tilde{\pi} : G \rightarrow \mathcal{X}$. Assim, dada uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{p}$, e sua imagem $A^+ := \exp \mathfrak{a}^+$, chamamos A^+x_0 , assim como suas imagens isométricas $gA^+x_0, g \in G$ de *câmaras de Weyl de \mathcal{X}* . Paredes no espaço

²É importante observar que apenas os grupos H_3, H_4 e $I_2(m)$ não se realizam como grupos de Weyl.

simétrico são definidas de modo totalmente análogo. O ponto $gx_0 \in gA^+x_0$ é chamado de *ponto base* da câmara.

5.1.1 $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$

Usando a notação introduzida nos parágrafos anteriores, consideramos o grupo de Lie semi-simples $G = SL(n, \mathbb{R})$, agindo em

$$P(n, \mathbb{R}) := \{x \in SL(n, \mathbb{R}) \mid x^T = x, x \text{ positiva definida}\}$$

por conjugação: $A(x) = AxA^T$. O estabilizador da identidade é, por definição, o subgrupo $K = SO(n, \mathbb{R})$, de modo que podemos identificar $P(n, \mathbb{R})$ com o espaço homogêneo $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$. As álgebras de Lie destes grupos são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{sl}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid \text{traço}X = 0\} \\ \mathfrak{k} &= \mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid X^T = -X\} \end{aligned}$$

e o complemento ortogonal de \mathfrak{k} é

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid X^T = X, \text{traço}X = 0\}.$$

A forma de Cartan-Killing, a involução de Cartan e a forma bilinear associada são dadas respectivamente por

$$B(X, Y) = \text{traço}(XY), \quad \nu(X) = -X^T, \quad \langle X, Y \rangle = \text{traço}(XZ^T).$$

As matrizes diagonais de traço nulo $\mathfrak{a} := \{X = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid \sum a_i = 0\}$ é subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{p} e $A := \exp \mathfrak{p} = \{\text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) \mid \sum a_i = 0\}$ é subgrupo abeliano de G .

As raízes de \mathfrak{g} são as aplicações $\lambda_{ij} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_{ij}(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_i - a_j$, para $i \neq j$ e $\{\lambda_{12}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{n-1,n}\}$ é sistema simples de raízes que determina a câmara

$$\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{a} \mid a_1 > a_2 > \dots > a_n\}.$$

O espaço associado a raiz λ_{ij} é o espaço gerado pela matriz E^{ij} que possui entrada ij igual a 1 e todas as restantes nulas.

5.2 Fronteira Ideal

Estamos lidando apenas com espaços simétricos do tipo não compacto, mas a construção que apresentamos da fronteira ideal, assim como de suas diversas métricas, é válida para qualquer variedade riemanniana simplesmente conexa e de curvatura não positiva (variedades de Hadamard). A generalização para contextos mais amplos exige a introdução de outros conceitos que não são relevantes neste contexto. A referência básica para esta seção é [BGS, capítulos 1-4].

Neste capítulo, consideraremos apenas geodésicas parametrizadas por comprimento de arco. dado um raio geodésico $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, dizemos que a restrição de γ a $\mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ é um *raio geodésico*. Dois raios geodésicos $\gamma, \beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{X}$ são ditos *assintóticos* se $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \beta(t))$ existir (e for finito), onde $d(\cdot, \cdot)$ é a função distância determinada pela métrica riemanniana de \mathcal{X} . A relação de assintocidade é uma relação de equivalência no conjunto de raios geodésicos e o conjunto de classes de equivalência de tais raios é chamado de *fronteira ideal* $\partial_\infty \mathcal{X}$. A classe de equivalência determinada por um raio γ é denotada por $\gamma(\infty)$. Definiremos três métricas distintas na fronteira ideal:

1. Sendo \mathcal{X} uma variedade de Hadamard, dado um raio geodésico γ e um ponto $x \in \mathcal{X}$, existe um e apenas um raio geodésico β assintótico a γ com ponto inicial $\beta(0) = x$. Assim sendo, podemos identificar $\partial_\infty \mathcal{X}$ com a esfera unitária no espaço tangente e induzir na fronteira ideal uma métrica que a torna isométrica a uma esfera. Denotamos esta métrica por d_S .
2. Dados $\eta, \xi \in \partial_\infty \mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}$, consideramos raios geodésicos γ e β tais que $\gamma(0) = \beta(0) = x$ e $\gamma(\infty) = \eta, \beta(\infty) = \xi$. A função $\frac{1}{t}d(\gamma(t), \beta(t))$ é convexa e limitada, de modo que seu limite existe e definimos $d_l(\eta, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}d(\gamma(t), \beta(t))$.
3. Dados $\eta, \xi \in \partial_\infty \mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}$, consideramos os representantes γ, β tais $\gamma(0) = \beta(0) = x$ e $\gamma(\infty) = \eta, \beta(\infty) = \xi$ e definimos $\angle_x(\eta, \xi)$ como o ângulo entre os raios geodésicos γ e β em x . A *métrica de Tits* é definida por

$$d_T(\eta, \xi) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \angle_x(\eta, \xi)$$

As duas últimas métricas não apenas determinam a mesma topologia, mas estão surpreendentemente relacionadas ([BGS]) pelo mesmo modo que a métrica intrínseca e a métrica extrínseca de uma esfera unitária em \mathbb{R}^n se relacionam:

$$d_l(\eta, \xi) = 2 \sin \left(\frac{d_T(\eta, \xi)}{2} \right).$$

No entanto, estas métricas são incompatíveis com a métrica esférica, definindo a mesma topologia apenas no caso de \mathcal{X} ser um espaço euclidiano.

Podemos dotar $\overline{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \cup \partial_\infty \mathcal{X}$ de uma topologia que coincida com a usual em \mathcal{X} e com d_S na fronteira ideal de modo a termos $\overline{\mathcal{X}}$ compacto, \mathcal{X} aberto e $\partial_\infty \mathcal{X}$ fechado. Fixamos $x_0 \in \mathcal{X}$ e consideramos seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ de pontos de \mathcal{X} . Para cada x_n existe um único raio geodésico γ_n passando por x_n e com ponto inicial x_0 . Dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma_0(\infty)$ se $d(x_0, x_n)$ for ilimitada e $\gamma_n(\infty)$ convergir para $\gamma_0(\infty)$, com a métrica d_S .

Dado um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$, definimos sua fronteira ideal $\partial_\infty \mathcal{C} := \partial \mathcal{C} \cap \partial_\infty \mathcal{X}$, onde $\partial \mathcal{C}$ é o bordo topológico usual em $\overline{\mathcal{X}}$. Se \mathcal{C} for convexo, então

$$\partial_\infty \mathcal{D} = \{\eta(\infty) \mid \eta(s) \text{ é raio geodésico contido em } \mathcal{C}\}.$$

Em particular, como toda câmara de Weyl $g\overline{A}^+x_0$ é convexa, temos que

$$\begin{aligned} g\overline{A}^+(\infty) & : = \partial_\infty \left(g\overline{A}^+x_0 \right) \\ & = \{ \eta(\infty) \mid \eta(s) = g(\exp sX)x_0, X \in \mathfrak{a}^+ \}. \end{aligned}$$

Chamamos estes conjuntos de *cômodos (de Weyl) ideais*. Não é difícil demonstrar que duas câmaras ideais ou são disjuntas ou coincidem. De modo similar, podemos definir *paredes ideais* e *flats ideais*, denotados respectivamente por $gA_\Theta^+(\infty)$ e $gA(\infty)$. Consideraremos também cômodos e paredes ideais fechados:

$$\begin{aligned} g\overline{A}_\Theta^+(\infty) & = \partial_\infty \left(g\overline{A}_\Theta^+x_0 \right) \\ & = \{ \eta(\infty) \mid \eta(s) = g(\exp sX)x_0, X \in \mathfrak{a}_\Theta^+ \}. \end{aligned}$$

5.3 Estrutura de Edifício da Fronteira Ideal

No ponto que nos encontramos, é possível adivinhar quais são os elementos na fronteira ideal que constituem os objetos básicos da estrutura de edifício. Os

cômodos e paredes são simplesmente a coleção de cômodos e paredes ideais. Os apartamentos são a imagens assintóticas de flats maximais de \mathcal{X} , ou seja, os conjuntos da forma

$$\begin{aligned} F(\infty) &= \{\eta(\infty) \mid \eta(s) \subset F\} \\ &= \{\eta(\infty) \mid \eta(s) = g(\exp sX)x_0, X \in \mathfrak{a}\} \end{aligned}$$

onde $F = gAx_0$ é um flat maximal em \mathcal{X} . Cada apartamento é isométrico (com a métrica de Tits) a uma esfera de dimensão $k - 1$, onde k é o posto de \mathcal{X} . A relação de incidência é determinada pela relação de incidência usual em apartamentos.

Para sermos mais explícitos, definimos

$$\begin{aligned} \Xi &= \left\{ g\overline{A}_\Theta^+(\infty) \mid g \in G, \Theta \subseteq \Sigma \right\} \\ &= \{\text{Todos os cômodos e paredes ideais}\} \\ \mathcal{A} &= \{gA(\infty) \mid g \in G\} \\ &= \{\text{Todos os flats ideais}\}. \end{aligned}$$

5.3.1 Fronteira Ideal de $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$

Nesta seção apresentaremos com certo detalhamento a estrutura de edifício da fronteira ideal de $SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$. Adotaremos a notação da seção 5.1.1.

O espaço simétrico $\mathcal{X} = SL(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R})$ pode ser identificado com o espaço das matrizes 3×3 simétricas positivas definidas, através da ação de $SL(3, \mathbb{R})$ dada por $A \cdot x = AxA^T$. Este espaço tem dimensão 5, de modo que sua fronteira é 4-dimensional. Como \mathcal{X} é uma variedade de Hadamard, sua fronteira ideal é determinada pela imagem assintótica dos raios geodésicos com ponto inicial no ponto $x_0 = \text{Id}_{3 \times 3}$. Dada geodésica parametrizada por comprimento de arco $\eta : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ com $\eta(0) = x_0$, temos seu vetor tangente $\eta'(0)$ é uma matriz simétrica A com traço 0 e norma $\|A\|^2 = \text{Tr}(AA^T) = 1$. Como A é simétrica, A é diagonalizável no grupo ortogonal, ou seja, possui autovalores reais a, b, c com autovetores associados v_a, v_b e v_c ortogonais. As condições de traço nulo e norma unitária se traduzem respectivamente nas igualdades $a + b + c = 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $a \geq b \geq c$ e associamos ao raio η a faixa $s_\eta := (\mathbb{R}v_a + [-r, r]v_b)$, onde $r := (b - c)/(a - b) \in [0, \infty]$. A faixa degenera-se em uma reta ($r = 0$)

quando $b = c$ ou num plano ($r = \infty$) quando $a = b$. A aplicação $\eta \mapsto s_\eta$ é uma bijeção sobre o espaço das faixas

$$\text{Str} := \{ \mathbb{R}v_1 + [-r, r]v_2 \subset \mathbb{R}^3 \mid \|v_1\| = \|v_2\| = 1, \langle v_1, v_2 \rangle = 0, r \in [0, \infty] \}.$$

O conjunto de tais faixas possui uma estrutura de edifício de Tits na qual os cômodos são as faixas não degeneradas. Cada cômodo possui duas paredes, determinadas pela degeneração da faixa em uma reta ou em um plano. Um apartamento é definido por uma base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$, conforme ilustrado na figura abaixo.

5.4 Teorema da Rigidez de Mostow

Um *espaço localmente simétrico* é uma variedade riemanniana \mathcal{M} em que todo ponto $x \in \mathcal{M}$ possui uma vizinhança normal em que a involução geodésica é uma isometria. Se a curvatura de \mathcal{M} for não positiva, o recobrimento universal de \mathcal{M} é um espaço simétrico do tipo não compacto \mathcal{X} e \mathcal{M} é difeomorfa a \mathcal{X}/Γ , com Γ isomorfo ao grupo fundamental de \mathcal{M} . O Teorema da Rigidez de Mostow afirma que o grupo fundamental um espaço localmente simétrico compacto com curvatura não positiva, determina não apenas a topologia, mas também a estrutura métrica deste espaço:

Teorema 5.4.0.1 (Teorema da Rigidez de Mostow) *Sejam \mathcal{M} e \mathcal{M}^* espaços localmente simétricos compactos, com curvatura não positiva e não*

(localmente) isométricos ao plano hiperbólico. Suponha ainda que os recobrimentos universais destes sejam irredutíveis (não possuam fatores de de Rahm). Então, se existe isomorfismo $\phi : \pi_1(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}^*)$, \mathcal{M} e \mathcal{M}^* são isométricos, a menos de uma constante multiplicativa.

Um outro enunciado equivalente deste teorema é o seguinte:

Teorema 5.4.0.2 *Sejam G e G^* grupos de Lie semi-simples conexos, com centro trivial, sem fatores compactos e posto real maior que 1. Sejam $\Gamma \subset G$ e $\Gamma^* \subset G^*$ subgrupos discretos tais que G/Γ e G^*/Γ^* sejam compactos e Γ irredutível. Suponha que $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma^*$ seja isomorfismo. Então, existe isomorfismo (de grupo de Lie) $\Phi : G \rightarrow G^*$ que estende ϕ .*

Este resultado foi demonstrado por Mostow em 1973 e posteriormente estendido por Margulies para o caso em que \mathcal{M} (ou G/Γ) possui volume finito, sem ser necessariamente compacto. Na realidade, esta versão decorre do Teorema da Super-Rigidez de Margulies [Zi, capítulo 5].

A demonstração de Mostow é longa (todas as 190 páginas de [Mo]) e trata em separado o caso de posto 1 e posto maior ou igual a 2. Apresentaremos aqui um mero esboço da demonstração para ilustrar a importância utilização que este fez da estrutura de edifício da fronteira ideal de um espaço simétrico.

Seguindo o esquema apresentado em [BGS], a demonstração segue os seguintes passos:

Etapa I Construir uma pseudo isometria³ ϕ -invariante⁴ $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$.

Etapa II Demonstrar que existe uma constante $R > 0$ tal que para todo flat maximal $F \subset \mathcal{X}$, existe um único flat maximal $F^* \subset \mathcal{X}^*$ tal que F^* está contido na R -vizinhança de $f(F)$ assim como $f(F)$ está contido na R -vizinhança de F^* . A partir deste resultado conclui-se que a pseudo-isometria induz uma aplicação entre os flats maximais de \mathcal{X} e de \mathcal{X}^* .

³Uma função contínua entre espaços métricos $f : X \rightarrow X^*$ é uma pseudo-isometria se existem constantes positivas L, C tais que:

- (a) $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \forall x, y \in X$;
- (b) $\frac{1}{L}d(x, y) < d(f(x), f(y)), \forall x, y \in X$ com $d(x, y) > C$.

⁴Dizer que f é ϕ invariante significa que $f(gx) = \phi(g)f(x), \forall g \in \Gamma, x \in \mathcal{X}$, onde \mathcal{X} (\mathcal{X}^*) é o recobrimento universal de \mathcal{M} (\mathcal{M}^*) e a ação de $\pi_1(\mathcal{M})$ ($\pi_1(\mathcal{M}^*)$) em \mathcal{X} (\mathcal{X}^*) é a ação usual por transformações de recobrimento.

90 *CAPÍTULO 5. EDIFÍCIOS ASSOCIADOS A ESPAÇOS SIMÉTRICOS*

Etapa III Demonstrar que esta aplicação entre flats maximais induz um isomorfismo entre os edifícios $\partial_\infty \mathcal{X}$ e $\partial_\infty \mathcal{X}^*$.

Etapa IV Utilizar uma variação do "Teorema Fundamental de Tits" (equivalente ao Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, [Ti, seção 5.8]) que um isomorfismo do edifício é induzido por uma isometria (a menos de constante) entre os espaços simétricos.

Capítulo 6

Apêndice1: Teoria de Grupos

Conforme dito anteriormente, revisamos neste apêndice alguns conceitos básicos sobre Teoria dos Grupos. Como apoio bibliográfico, sugerimos os livros textos [Her, Capítulo 2] e [Rot, Capítulos 1 a 3] para a primeira seção e os textos [MKS] e [Ly] para as outras.

Como é natural de se esperar em um apêndice desta natureza, as demonstrações das proposições são geralmente omitidas. No entanto, mais do que uma lista de definições e proposições utilizadas ou referidas nos capítulos anteriores, este apêndice pode ser visto como um resumo, ou panorama, dos principais conceitos envolvidos, nem todos explicitamente mencionados anteriormente. Mais ainda, com o intuito de permitir que se adquira um mínimo de intimidade com os objetos em questão, apresentamos diversos exemplos cujos detalhes podem ser trabalhados pelo leitor.

6.1 Generalidades sobre Grupos

Nesta seção, faremos uma revisão dos conceitos realmente básicos de Teoria de Grupos. Todo este conteúdo pode ser encontrado nos primeiros capítulos de qualquer livro texto sobre o assunto, de modo que nos daremos o direito de fazer uma apresentação extremamente suscinta do assunto, economizando inclusive nos exemplos que podem ser encontrados à fartura em qualquer um dos textos sugeridos.

Lembremos que um grupo (G, \cdot) é um conjunto não vazio de elementos G

e uma operação binária (chamada de *produto do grupo*)

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Propriedade associativa:* $(gh)k = g(hk), \forall g, h, k \in G$
2. *Elemento neutro:* Existe um único elemento $e := e_G \in G$ (chamado de *elemento neutro de G*) tal que $eg = ge = g, \forall g \in G$
3. *Elemento inverso:* Dado $g \in G$, existe um único elemento em G , denotado por g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Um *subgrupo* H de G é um subconjunto $H \subseteq G$ que, com relação ao produto definido em G , é um grupo per si. dado um subgrupo $H \subseteq G$ e $g \in G$, os subconjuntos

$$Hg := \{hg|h \in H\}, \quad gH := \{gh|h \in H\}$$

são chamados de classes lateral a direita (respectivamente esquerda) de H determinada por g . As classes laterais a direita e a esquerda estão em bijeção e cada uma destas famílias determina uma partição de G : duas classes laterais a direita (esquerda) ou coincidem ou são disjuntas. O *índice de H em G*, denotado por $[G : H]$, é o número de classes laterais de H em G .

A ordem de um grupo G , denotada por $|G|$, é a cardinalidade de seu conjunto de elementos. Já a ordem de um elemento $g \in G$, denotada por $|g|$, é o menor inteiro positivo m tal que $g^m = e$. Caso não exista tal inteiro, dizemos que g tem ordem infinita.

No caso de um grupo finito G for grupo finito, então valem os seguintes resultados:

1. dado um subgrupo $H \subseteq G$, $[G : H] = |G| / |H|$;
2. Para todo $g \in G$, $|g|$ divide $|G|$;
3. Para todo $g \in G$, $g^{|G|} = e$.

dado um subgrupo $H \subseteq G$, podemos operar com suas classes laterais (a direita ou a esquerda) definindo o produto usual de subconjuntos

$$(aH)(bH) := \{ah_1bh_2 \mid h_1, h_2 \in H\}. \quad (6.1)$$

De modo geral, este produto de classes laterais não é necessariamente uma classe lateral, de modo que não podemos definir uma estrutura de grupo no conjunto de classes laterais. No entanto, se para todo $a \in G$ as classes laterais a direita e a esquerda coincidirem ($aH = Ha$), teremos que $(aH)(bH) = abH$. Esta condição que acabamos de apresentar é resumida no resultado abaixo:

Proposição 6.1.0.3 *Um subgrupo N de G é dito subgrupo normal de G se satisfizer qualquer uma das condições abaixo, todas equivalentes:*

1. Para todo $a \in G$, $aNa^{-1} = N$;
2. Para todo $a \in G$, $aN = Na$;
3. O conjunto de classes laterais $\{aH \mid a \in G\}$, com a operação definida em 6.1, é um grupo.

Neste caso, o grupo das classes laterais de H em G é chamado de *grupo quociente* e denotado por G/H ou $H \backslash G$, dependendo de considerarmos classes laterais a esquerda ou a direita.

Inúmeros grupos são obtidos através deste mecanismo, ou seja, como quociente de um grupo por um subgrupo normal. Mencionamos a título de exemplo um único caso, os grupos \mathbb{Z}_n (n inteiro positivo), definidos como o quociente do grupo aditivo \mathbb{Z} pelo subgrupo normal (verifique) $n\mathbb{Z}$, formado pelos múltiplos inteiros de n . O quociente $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo finito com n elementos, que denotamos por $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$, com \bar{i} representando a classe dos inteiros que, divididos por n tem resto i .

Ao tratarmos de grupos, assim como em qualquer teoria matemática, identificamos objetos que diferem apenas na natureza dos objetos mas não em suas propriedades ou relações. Para isto introduzimos a noção de homomorfismo:

Uma aplicação ϕ entre grupos G e G' é dita um *homomorfismo* se para todos $a, b \in G$ tivermos $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, onde fica subentendido que no primeiro termo estamos considerando o produto em G e no segundo o produto de G' . Um homomorfismo bijetor é inversível e seu inverso também é

homomorfismo e é o que denominamos *isomorfismo de grupos*. Grupos isomorfos (que estão relacionados por isomorfismos) são essencialmente idênticos e o conhecimento que se busca através da teoria de grupos é aquele que se aplica a classes de grupos isomorfos.

Homomorfismos estão intimamente ligados a grupos quocientes. De fato, se $N \subseteq G$ for subgrupo normal, a aplicação

$$\begin{aligned} & : G \rightarrow G/N \\ & g \mapsto gN \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor. Reciprocamente, se $\phi : G \rightarrow H$ for homomorfismo sobrejetor, então H é isomorfo a $G/\ker \phi$ onde $\ker \phi := \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}$, chamado de núcleo de ϕ , é sempre um subgrupo normal de G (note que e_H é a identidade do grupo H).

6.2 Apresentação de Grupos

Dado um grupo G , dizemos que G é gerado por um subconjunto $S \subseteq G$ (e chamamos S de um *conjunto gerador*) se todo elemento $g \in G$ puder ser expresso como produto $g = g_1 \cdots g_n$, com $g_1, \dots, g_n \in S$.

Exemplo: O Grupo de Klein K_2 é o grupo de funções reais

$$\left\{ f_0(x) = x, f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = \frac{1}{x} \right\},$$

onde a operação é a composição de funções. Se preferir, pense no grupo constituído das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

com a operação usual de matrizes. É imediato verificar que de fato, temos um grupo definido com esta operação. O elemento neutro é obviamente a função identidade $f(x) = x$. O grupo é gerado pelas funções f_1, f_2 pois obtemos $f_3(x) = f_1 \circ f_2(x)$ e $f_0(x) = f_1^2(x)$. Se representarmos f_0, f_1 e f_2 respectivamente pelos símbolos e, g e h , teremos então que $e = g^2, e = h^2, gh = hg$. Existem outras relações algébricas envolvendo estes símbolos, por exemplo as relações $g^3 = g$ e $(gh)^2 = e$. No entanto estas são todas

derivadas das três primeiras, utilizando-se apenas as propriedades garantidas pelos axiomas de grupo. Por exemplo

$$(gh)^2 = (gh)(gh) = g(hg)h = g(gh)h = (gg)(hh) = g^2h^2 = ee = e.$$

De fato, seja

$$g^{\gamma_1}h^{\eta_1}\dots g^{\gamma_r}h^{\eta_r} = g^{\varepsilon_1}h^{\delta_1}\dots g^{\varepsilon_s}h^{\delta_s} \quad (6.2)$$

ou, equivalentemente,

$$g^{\gamma_1}h^{\eta_1}\dots g^{\gamma_r}h^{\eta_r}h^{-\delta_s}g^{-\varepsilon_s}\dots h^{-\delta_1}g^{-\varepsilon_1} = e.$$

Usando o fato que $g^2 = h^2 = e$, obtemos que $g = g^{-1}$ e $h = h^{-1}$, de modo que podemos supor que todos os expoentes são positivos. Mais ainda, como $g^{2n} = (g^2)^n = e^n = e$ e $g^{2n+1} = (g^2)^n g = eg = g$ (e similarmente para h), podemos assumir que todos os expoentes são 1 ou 0, de modo que a expressão se reduz a

$$g^\gamma h^\eta = e, \quad \gamma, \eta = 0, 1, \quad (6.3)$$

e a única possibilidade para esta relação valer é termos $\gamma = \eta = 0$, ou seja, $e = e$. Revertendo os passos a partir de 6.3, podemos obter a relação 6.2, utilizando apenas as propriedades de grupo e as relações iniciais

$$e = g^2, e = h^2, gh = hg. \quad (6.4)$$

Assim, podemos descrever o grupo de Klein como o grupo abstrato gerado pelos elementos g, h , sujeito apenas às relações 6.4, no sentido que dois grupos que podem ser descritos deste modo são isomorfos. \square

Exemplo: O grupo S_3 das permutações de três objetos x, y, z é um grupo de seis elementos gerado pelos ciclos (xyz) e (xy) . De fato,

$$\begin{aligned} e &= (xyz)^3 = (xy)^2 \\ (xyz) &= (xyz) \\ (xzy) &= (xyz)^2 \\ (xy) &= (xy) \\ (xz) &= (xyz)(xy) \\ (yz) &= (xy)(xyz). \end{aligned}$$

Novamente, se denotarmos (xyz) e (xy) respectivamente por g e h , temos que S_3 é gerado pelos elementos g e h sujeito apenas às relações $g^3 = h^2 = (gh)^2 = e$. \square

Podemos proceder de modo abstrato. Partimos de um conjunto de símbolos $S = \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n, \sigma_n^{-1}\}$, que chamamos de alfabeto. Uma *palavra* w com alfabeto S é uma seqüência finita qualquer $w = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, onde $i_j = 1, \dots, n$ e $\varepsilon_j = \pm 1$. Dizemos que $L(w) = k$ é o *comprimento* da palavra w . A palavra vazia, única palavra de comprimento 0, é denotada por e . Denotamos σ_i^1 simplesmente por σ_i e costumamos abreviar blocos consecutivos de k símbolos σ_i (σ_i^{-1}) por σ_i^k (σ_i^{-k}). Por exemplo

$$\sigma_1^4 \sigma_2^3 \sigma_1^5 \sigma_2^{-2} = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1}.$$

Definimos o *produto por justaposição* de duas palavras $u = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ e $w = \sigma_{j_1}^{\delta_1} \dots \sigma_{j_l}^{\delta_l}$ como a palavra

$$uw = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \sigma_{j_1}^{\delta_1} \dots \sigma_{j_l}^{\delta_l}$$

e a *palavra inversa*

$$w^{-1} = \sigma_{j_l}^{-\delta_l} \dots \sigma_{j_1}^{-\delta_1}.$$

Obviamente, $L(uw) = L(u) + L(w)$ e $L(w) = L(w^{-1})$.

Se assumirmos por conveniência que $\sigma_i^0 = e$ (a palavra vazia) para todo i , temos que, o conjunto

$$\mathbb{F}(S) = \{\text{Todas as palavras escritas com o alfabeto } S\},$$

com o produto por justaposição, tem a estrutura de um grupo, chamado de *grupo livre gerado por n elementos* (símbolos). Obviamente, a palavra vazia e é o elemento neutro e o inverso de w é a palavra w^{-1} . Como grupo, $\mathbb{F}(S)$ é gerado pelas palavras de comprimento 1: $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}$. Note que este grupo é altamente não comutativo: $\sigma_i^{\varepsilon_i} \sigma_j^{\varepsilon_j} = \sigma_j^{\varepsilon_j} \sigma_i^{\varepsilon_i}$ se e somente se $i = j$, ou seja, qualquer gerador comuta apenas com sí mesmo e com o seu inverso.

Dado um grupo G gerado por um conjunto $S' = \{g_1, \dots, g_n\}$, consideramos o grupo livre $\mathbb{F} = \mathbb{F}(S)$ gerado pelo conjunto $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. A aplicação

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \rightarrow & G \\ \sigma_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots \sigma_{i_k}^{\eta_{i_k}} & \mapsto & g_{i_1}^{\eta_{i_1}} \dots g_{i_k}^{\eta_{i_k}} \end{array}$$

é um homomorfismo de grupos, obviamente sobrejetor. Seu núcleo é o conjunto

$$R = \ker \phi = \left\{ \sigma_{i_1}^{\eta_{i_1}} \cdots \sigma_{i_k}^{\eta_{i_k}} \in \mathbb{F} \mid g_{i_1}^{\eta_{i_1}} \cdots g_{i_k}^{\eta_{i_k}} = e \right\}$$

e temos, pelo teorema do isomorfismo que G é isomorfo a $\mathbb{F}/\ker \phi$ (resultado conhecido como Teorema de Cayley).

Dizemos então que o par $(S, \ker \phi)$ é uma *apresentação* de G . A notação usualmente adotada é $G = \langle S \mid R \rangle$. Se $\ker \phi$ for finitamente gerado por uma família

$$R' = \left\{ \sigma_{i_1,1}^{\eta_{i_1,1}} \cdots \sigma_{i_1,k_1}^{\eta_{i_1,k_1}}, \dots, \sigma_{i_l,1}^{\eta_{i_l,1}} \cdots \sigma_{i_l,k_l}^{\eta_{i_l,k_l}} \right\}$$

então temos que todas as relações de R podem ser obtidas a partir destas e neste, dizemos que $G = \langle S \mid R' \rangle$ é uma *apresentação finita* de G . Observe que nesta situação, R é o *fecho normal* de R' , ou seja, o menor subgrupo normal de \mathbb{F} que contém R' .

Exemplo: Frequentemente, abusamos da linguagem e ao invés de escrevermos os conjuntos S e R , omitimos os parênteses e simplesmente listamos os elementos destes conjuntos. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} K_2 &= \langle g, h \mid g^2 = h^2 = (gh)^2 = e \rangle \\ S_3 &= \langle g, h \mid g^3 = h^2 = (gh)^2 = e \rangle \\ \mathbb{Z}^2 &= \langle g, h \mid ghg^{-1}h^{-1} = e \rangle. \end{aligned}$$

A apresentação de um grupo não é única. Se, por exemplo, considerarmos os geradores $(xy), (yz)$ de S_3 , obeteremos a apresentação

$$S_3 = \langle g, h \mid g^2 = h^2 = (gh)^3 = e \rangle.$$

□

Conforme vimos no exemplo acima, um grupo pode ser apresentado de diversos modos. Existem quatro operações elementares que nos permitem passar de uma apresentação a outra, conhecidas como *transformações de Tietze*:

1. Substituir a apresentação $\langle S \mid R \rangle$ pela apresentação $\langle S \mid R \cup \{r\} \rangle$, onde r é uma conseqüência de R , ou seja, r pertence ao fecho normal de R ;
2. A operação oposta da anterior, ou seja, substituir a apresentação $\langle S \mid R \cup \{r\} \rangle$ pela apresentação $\langle S \mid R \rangle$, onde r é uma conseqüência de R ;

3. Substituir a apresentação $\langle S|R \rangle$ pela apresentação $\langle S \cup \{s\} | R \cup \{r\} \rangle$, onde s é um elemento novo, não pertencente a S , e r é uma relação da forma $s^{-1}w$, com w uma palavra definida em termos dos geradores em S ;
4. A operação oposta de (3), ou seja, substituir a apresentação $\langle S \cup \{s\} | R \cup \{r\} \rangle$ pela apresentação $\langle S|R \rangle$, sob as mesmas condições do caso anterior.

Obviamente, duas apresentações que diferem por transformações de Tietze definem grupos isomorfos. A recíproca também é verdadeira, ou seja:

Teorema 6.2.0.4 [Ly, pag. 16] *Duas apresentações finitas definem grupos isomorfos se e somente se é possível passar de uma para a outra através de um número finito de transformações de Tietze.*

Exemplo: Considere as apresentações $\langle a|a^6 = e \rangle$ e $\langle b, c|b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = e \rangle$ do grupo cíclico com 6 elementos \mathbb{Z}_6 . Vamos mostrar como passar de uma a outra através de transformações de Tietze:

Utilizamos a transformação do tipo 3 e substituímos

$$\langle a|a^2 = e \rangle \quad (6.5)$$

por

$$\langle a, b, c|a^6 = b^{-1}a^3 = c^{-1}a^2 = e \rangle \quad (6.6)$$

(observe que temos $b = a^3$ e $c = a^2$). Destas relações segue que $b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = a^{-1}bc^{-1} = e$. Assim, através de uma relação do tipo 1, substituímos a apresentação 6.6 pela apresentação

$$\langle a, b, c|a^6 = b^{-1}a^3 = c^{-1}a^2 = b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = a^{-1}bc^{-1} = e \rangle. \quad (6.7)$$

Verifica-se diretamente que as relações $a^6 = b^{-1}a^3 = c^{-1}a^2 = e$ são conseqüências das relações $b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = a^{-1}bc^{-1} = e$ de modo que, através de operação do tipo 2 obtemos de 6.7 a apresentação

$$\langle a, b, c|b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = a^{-1}bc^{-1} = e \rangle. \quad (6.8)$$

Finalmente, usamos uma transformação do tipo 4 em 6.8 para excluir o gerador a assim como a relação $a^{-1}bc^{-1} = e$, obtendo a apresentação desejada

$$\langle b, c|b^2 = c^3 = bcb^{-1}c^{-1} = e \rangle. \quad (6.9)$$

□

Uma apresentação de grupos $G = \langle S | R \rangle$ determina uma norma e uma métrica no grupo G . Definimos a *norma* de um elemento $g \in G$ como o comprimento da menor palavra que representa o elemento:

$$|g|_c = \min \{L(w) \mid w = g\}.$$

A distância entre dois elementos $g, h \in G$ é definida como

$$d_c(g, h) = |h^{-1}g|_c.$$

O índice c , frequentemente omitido, indica que estamos tratando da norma e distância de Cayley. É imediato constatar que esta distância define uma métrica ¹ em X e que esta métrica é invariante pela ação a esquerda de G , ou seja, $d(gh, gk) = d(h, k)$, para quaisquer $g, h, k \in G$. Observe ainda que esta depende não apenas do grupo G mas também de sua apresentação. Por exemplo, se considerarmos as apresentações 6.5 e 6.9 de $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, temos que no primeiro caso, $d(\bar{2}, \bar{3}) = 1$ enquanto no segundo, $d(\bar{2}, \bar{3}) = 2$.

Esta métrica é discreta e pode ser realizada como um espaço contínuo (conexo) através do *grafo de Cayley*. Os vértices do grafo são pontos em bijeção com G . Dados dois pontos (associados aos elementos) g e h , estes são ligados por uma aresta se e somente se $h^{-1}g \in S$, ou seja, se diferirem por um gerador (ou equivalentemente, se e somente se $d(g, h) = 1$).

6.3 Representação de Grupos

O conjunto $GL(V)$ das transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial V , com a operação usual de composição, é um grupo. No caso de V ter dimensão finita n , ao escolhermos uma base, podemos identificar canonicamente o conjunto $GL(V)$ com o conjunto das matrizes $n \times n$ de determinante não nulo (sobre o corpo base de V), onde a operação em $GL(V)$

¹Uma métrica é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
2. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

é compatível com o produto usual de matrizes, de modo que este conjunto de matrizes, com o produto usual, é frequentemente identificado com $GL(V)$.

Uma *representação* de um grupo G em $GL(V)$ (que abusando da linguagem, frequentemente diremos ser uma representação em V) é um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

Exemplo:

S_n : Considere o grupo S_n de permutação dos elementos $\{1, \dots, n\}$. Seja V espaço vetorial de dimensão n e $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V . A aplicação

$$\begin{aligned} \rho : S_n &\rightarrow GL(V) \\ \sigma &\mapsto \rho(\sigma) : \quad V \rightarrow V \\ &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

é uma representação. Observe que S_n "age" em V por permutação de coordenadas.

K_2 : A aplicação $\rho : K_2 \rightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$\begin{aligned} x &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -x &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{x} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{x} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma representação.

\mathbb{Z}^2 : A aplicação $(m, n) \mapsto \begin{pmatrix} e^m & 0 \\ 0 & e^n \end{pmatrix}$ é uma representação de \mathbb{Z}^2 em $GL(\mathbb{R}^2)$.

D_{2n} : Considere o *Grupo Diedral* $D_n = \langle g, h \mid g^2 = h^n = (gh)^n = e \rangle$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned} g &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ h &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pode ser estendida (de modo único) a uma representação $\rho : D_n \rightarrow GL(\mathbb{R}^2)$.

□

Uma representação $\rho : G \rightarrow GL(V)$ é dita *irredutível* (ou *essencial* no contexto de Grupos de Coxeter) se não existe subespaço $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$ invariante por $\rho(G)$, ou seja, tal que $\rho(g)v \in W$ para $g \in G$ e $v \in W$ quaisquer.

Exemplo: As representações dadas acima dos grupos \mathbb{Z}^2 e D_n são irredutíveis. Já as representações de S_n e K_2 não o são. De fato, o subespaço unidimensional de V gerado pelo vetor $(1, 1, \dots, 1)$ é invariante por permutação de coordenadas. O mesmo vale para o seu complemento ortogonal

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 1 \right\}.$$

Sendo W invariante por $\rho(S_n)$, podemos considerar a restrição desta representação obtendo assim uma representação $\rho^*(g) = \rho(g)|_W$. Esta representação é irredutível (demonstre!). Já para a representação de K_2 , é fácil ver que os subespaços definidos pelas equações $x = y$ e $x = -y$ são ambos invariantes por $\rho(K_2)$. A restrição de ρ a qualquer um destes espaços é trivialmente irredutível. □

6.4 Ações de Grupos

Começamos o estudo de ação de um grupo com a definição necessária:

Definição 6.4.0.5 *Seja G um grupo e X um conjunto. Uma ação de G em X (uma G -ação) é uma aplicação $\phi : G \times X \rightarrow X$ tal que $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ e $\phi(e, x) = x$, para $g, h \in G, x \in X$ quaisquer, onde $e \in G$ é a identidade.*

Se ϕ for um G -ação em X , é imediato constatar que, para todo $g \in G$, a aplicação $\phi_g : X \rightarrow X$, definida por $\phi_g(x) = \phi(g, x)$ é uma permutação (bijeção) de X . De fato, se $\phi_g(x) = \phi_g(y)$, então $\phi_{g^{-1}}\phi_g(x) = \phi_{g^{-1}}\phi_g(y)$. Mas

$$\begin{aligned} \phi_{g^{-1}}\phi_g(x) &= \phi(g^{-1}, \phi(g, x)) = \phi(g^{-1}g, x) = \phi(e, x) = x \\ \phi_{g^{-1}}\phi_g(y) &= \phi(g^{-1}, \phi(g, y)) = \phi(g^{-1}g, y) = \phi(e, y) = y \end{aligned}$$

e temos que ϕ_g é injetora. Além disto, dado $y \in X$, temos que $y = \phi_g(\phi_{g^{-1}}(y))$ de modo que ϕ_g é de fato uma permutação de X , ou seja, $\phi_g \in S_X$, o grupo de permutações de X .

Assim, se considerarmos a aplicação $\Phi : G \rightarrow S_X$, definida por $\Phi(g) = \phi_g$, teremos que

$$\Phi(g)\Phi(h)(x) = \phi_g(\phi(h, x)) = \phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x) = \Phi(gh)(x)$$

para todo $x \in X$, ou seja, Φ é um homomorfismo de G em S_X .

Usamos indistintamente as notações (G, X, ϕ) e (G, X, Φ) , ou simplesmente (G, X) , quando a definição de ϕ for clara pelo contexto.

Observação 6.4.0.6 *Se consideramos \mathbb{K}^X um espaço vetorial construído formalmente tendo X como base e \mathbb{K} como corpo base, então S_X age em \mathbb{K}^X permutando as coordenadas, ou seja, se $\phi \in S_X$, definimos $\tilde{\phi}(\sum_i a_i x_i) = \sum_i a_i \phi(x_i)$, onde $a_i \in \mathbb{K}, x_i \in X$ e $i \in I$, um conjunto finito de índices. Temos assim que $\tilde{\phi}$ é uma transformação linear e a aplicação $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ de S_X em $GL(\mathbb{K}^X)$ é uma representação.*

Denotamos a ação ϕ de G em X por (G, X, ϕ) . Quando ϕ for fixa e não houver perigo de confusão, denotaremos $g(x) = \phi(g, x) = \Phi(g)(x)$. Com esta notação, temos que $g(h(x)) = gh(x)$.

Exemplo: S_X e seus subgrupos agem de maneira natural em X . Se considerarmos o caso em que $X = \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito, denotamos $S_X = S_n$. Adotamos a notação usual para ciclos em $S_n : (x_1, x_2, \dots, x_k)$ representa o elemento $\phi \in S_n$ tal que $\phi(x_i) = x_{i+1}$ (se $i = 1, \dots, k-1$) e $\phi(x_k) = x_1$. É conhecido o fato que todo elemento $\phi \in S_n$ se escreve (não de maneira única) como produto $(i_1, j_1) \dots (i_l, j_l)$ de transposições. Embora esta decomposição não seja única, a paridade do índice l é bem definida. Temos alguns subgrupos particulares de S_n que merecem um nome próprio: O grupo *alternado* A_n formado pelos elementos que se descrevem como produto de um número par de transposições e o grupo *diedral* D_n gerado pelos elementos $(1, 2, \dots, n)$ e $(1, 2k)(2, 2k-1) \dots (k, k+1)$ se $n = 2k$ for par e pelos elementos $(1, 2, \dots, n)$ e $(2, 2k-2)(3, 2k-3) \dots (k, k+1)$ se $n = 2k-1$ for ímpar. \square

Exemplo: Considere V um espaço vetorial e

$$G = GL(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ é linear e bijetora}\}.$$

G age de maneira natural em V , assim como os seus subgrupos. Se V for um espaço euclidiano², consideramos os seguintes subgrupos de $GL(V)$:

$$\begin{aligned} SL(V) &= \{A \in GL(V) \mid \det A = 1\} \\ O(V) &= \{A \in GL(V) \mid A^T A = \text{Id}\} \\ SO(V) &= \{A \in SL(V) \mid A^T A = \text{Id}\}. \end{aligned}$$

□

Exemplo: Conforme vimos, ao fixarmos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , temos uma ação natural do grupo S_n em V permutando os elementos da base e estendendo a ação por linearidade, ou seja, $\Psi(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_n e_n) = \alpha_1 \phi(e_1) + \dots + \alpha_n \phi(e_n)$. Observe que esta representação é obtida em um espaço de dimensão n . Para o caso dos grupos diedrais D_n , podemos representá-los sempre em \mathbb{R}^2 . Identificamos o gerador $a = (1, 2, \dots, n)$ com a transformação definida pela matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$ e o gerador $b = (1, 2k)(2, 2k-1) \dots (k, k+1)$ com a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e a um elemento $a^{i_1} b^{i_1} \dots a^{i_l} b^{i_l}$ identificamos a matriz $A^{i_1} B^{i_1} \dots A^{i_l} B^{i_l}$. Tente verificar diretamente estas afirmações para os casos $n = 3, 4$. □

Exemplo: Um grupo G sempre age sobre si próprio ao menos de três maneiras importantes:

$$\begin{aligned} L_g(h) &:= gh && \text{translação a esquerda} \\ R_g(h) &:= hg && \text{translação a direita} \\ C_g(h) &:= ghg^{-1} && \text{conjugação ou automorfismo interno} \end{aligned}$$

□

²Dizemos que V é *euclidiano* se for um espaço vetorial real de dimensão finita, dotado de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear ($\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ e $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$ quaisquer), simétrica ($\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$) positiva definida ($\langle u, u \rangle > 0 \forall 0 \neq u \in V$ e $\langle 0, 0 \rangle = 0$). Um produto interno induz uma norma $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ e uma métrica $d(u, v) = \|u - v\|$.

Exemplo: Dados inteiros $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k = n$, uma *bandeira* de tipo $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ em um espaço vetorial V de dimensão n é uma seqüência encaixante de sub-espços $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k$ tal que $\dim V_j = i_j$. O conjunto de todas as bandeiras de tipo $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ é uma variedade diferenciável compacta, chamada de variedade bandeira $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$, denotada por $\mathcal{F}_{i_0, i_1, \dots, i_k}$. Os espaços projetivos e as Grassmannianas $G(n, m)$ são casos particulares de variedades bandeiras, respectivamente os casos $\mathcal{F}_{0,1,n}$ e $\mathcal{F}_{0,m,n}$. Para simplificar a notação, frequentemente omitiremos os índices $i_0 = 0$ e $i_k = n$. É imediato constatar que $GL(V)$, assim como seus subgrupos, age em $\mathcal{F}_{i_0, i_1, \dots, i_k}$: A transformação linear T leva a bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k$ em $T(V_0) \subset T(V_1) \subset \dots \subset T(V_k)$. \square

Definição 6.4.0.7 *Uma ação (G, X, Φ) é dita*

1. Fiel se $\ker \Phi = \{e\}$, ou seja, se $g(x) = x, \forall x \in X$ se e somente se $g = e$.
2. Simples e não possuir pontos fixos, ou seja, se $g(x) = x$ para algum $x \in X$ então $g = e$.
3. Transitiva se, para quaisquer $x, y \in X$ existir $g \in G$ tal que $g(x) = y$. Neste caso, dizemos que (G, X) é um espaço homogêneo, ou que X é um espaço G -homogêneo.

Exemplos:

1. A ação de S_X em X , assim como a de seus subgrupos A_n e D_n são transitivas. Observe por exemplo, no caso do grupo diedral, que $(1, 2, \dots, n)^{l-k} (k) = l$.
2. $GL(V)$, assim como $SL(V)$, agem transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$, mas não sobre V . $O(n)$ age transitivamente sobre as esferas $S_r^n = \{v \in V \mid \|v\| = r\}$.
3. Consideremos um polígono regular \mathcal{P} de n lados no plano euclidiano, com baricentro na origem. O grupo diedral D_n , através da representação usual (6.4), age transitivamente sobre o conjunto dos vértices de \mathcal{P} , assim como sobre suas arestas.
4. A ação de um grupo sobre si mesmo por translações é sempre transitiva. A ação por conjugação nunca o é (porque?).

5. A ação de $O(V)$ é transitiva sobre qualquer variedade bandeira: Dada uma bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k$ do tipo $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$, consideramos uma base ortogonal $\{v_1, \dots, v_{i_1}\}$ de V_1 . Completamos esta base a uma base ortogonal de V_2 , ou seja, escolhemos $v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}$ em V_2 ortogonais entre si e ortogonais a V_1 . Continuando deste modo obtemos uma base ortogonal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{v_1, \dots, v_{i_l}\}$ é base de V_l para todo $l = 0, 1, \dots, k$. Procedemos de modo similar para uma bandeira $W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k$ do tipo $\{i'_0, i'_1, \dots, i'_k\}$, obtendo outra base ortonormal $\{w_1, \dots, w_n\}$. A transformação linear definida por $T(v_i) = w_i$ é uma transformação ortogonal que tal que $T(V_i) = W_i$.
6. A ação de D_n não é simples sobre o conjunto de arestas de um polígono, nem sobre o conjunto de seus vértices. No entanto, ela é simples no produto cartesiano $\{\text{vértices de } \mathcal{P}\} \times \{\text{arestas de } \mathcal{P}\}$
7. A ação de um grupo sobre si mesmo, por translações, é sempre simples.
8. A ação de $O(V)$ é simples sobre o conjunto de bases ortonormais de V mas não sobre as variedades bandeira de V . Mesmo se considerarmos a variedade bandeira completa $\mathcal{F}_{0,1,2,\dots,n}$, cada bandeira pode ser representada por uma base ortonormal, mas esta representação não é única: duas bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ representam a mesma bandeira se e somente se $e'_i = \pm e_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Observação 6.4.0.8 *Os adjetivos fiel, transitivo e simples guardam a seguinte relação quando avaliados em relação a grupos e subgrupos: se $H \subset G$ for subgrupo, com G agindo em X , então*

$$\begin{aligned} \text{a ação de } H \text{ é transitiva} &\Rightarrow \text{a ação de } G \text{ é transitiva} \\ \text{a ação de } G \text{ é fiel} &\Rightarrow \text{a ação de } H \text{ é fiel} \\ \text{a ação de } G \text{ é simples} &\Rightarrow \text{a ação de } H \text{ é simples.} \end{aligned}$$

Qualquer uma das recíprocas não é necessariamente verdadeira.

Associados aos conceitos de ação transitiva e simples temos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \text{Órbita de } x &: G(x) = \{g(x) \mid g \in G\} \\ \text{Estabilizador de } x &: G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}. \end{aligned}$$

A órbita de um ponto indica o quanto uma ação é próxima de ser transitiva, enquanto que o estabilizador nos dá a medida de quanto esta deixa de ser simples, no sentido que (G, X) é uma ação

$$\begin{aligned} \text{transitiva} &\Leftrightarrow G(x) = X, \forall x \in X \\ \text{simples} &\Leftrightarrow G_x = \{e\}, \forall x \in X. \end{aligned}$$

É imediato verificar que o estabilizador de um ponto (ou de um conjunto de pontos) é um subgrupo de G . Mais ainda, se $g(x) = y$, então $G_y = gG_xg^{-1}$.

Exemplos:

1. Seja $G = GL(V)$. Então, para $x \neq 0$ temos que $G(x) = V \setminus \{0\}$, enquanto $G(0) = \{0\}$. A ação de G é transitiva sobre o conjunto das bases de V . Dado $0 \neq e_1 \in V$, completamos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e obtemos que

$$G_{e_1} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = n - 1 \right\}$$

que está em bijeção com o conjunto

$$\{\{f_2, \dots, f_n\} \mid \{e_1, f_2, \dots, f_n\} \text{ é linearmente independente}\}.$$

Se considerarmos $G = O(V)$, para qualquer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (coordenadas em uma base ortonormal) temos que

$$G(x) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid \sum_i y_i^2 = \sum_i x_i^2 \right\}.$$

Já o estabilizador G_{e_1} ($e_1 \neq 0$) está naturalmente em bijeção com o conjunto

$$\{\{f_2, \dots, f_n\} \mid \{e_1, f_2, \dots, f_n\} \text{ é base ortonormal}\}.$$

2. Vamos considerar a ação de $O(V)$ na variedade bandeira $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{0,1,2,\dots,n}$. Como cada bandeira é determinada por uma base ortonormal, temos

que a ação de $O(V)$ é transitiva em \mathcal{F} . No entanto, duas bases ortonormais ordenadas $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\beta = \{f_1, \dots, f_n\}$ podem definir a mesma bandeira. Isto ocorre se e somente se $f_i = e_i, \forall i = 1, \dots, n$. Logo, o estabilizador de um ponto é o conjunto das matrizes (na base α)

$$\{\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, n\} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Um raciocínio similar pode ser desenvolvido para a ação de $GL(V)$ em \mathcal{F} . Neste caso, considerando as bases α e β , estas definem uma mesma bandeira se e somente se tivermos $f_k = \sum_{i=1}^k a_i e_i$, de modo que, na base α , o estabilizador da bandeira definida pela base α é o conjunto

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid \det A \neq 0 \right\}.$$

Proposição 6.4.0.9 *Seja (G, X) um espaço homogêneo. Então existe uma bijeção entre X e o conjunto de classes laterais G/G_x . Em particular, se G for finito, temos que $|X| = |G|/|G_x|$.*

Demonstração: Observamos antes de tudo que se $g(x) = y$, então $G_y = gG_xg^{-1}$. Assim, associamos a classe lateral $gG_x \in G/G_x$ o ponto $g(x) \in X$. Antes de tudo devemos verificar que esta associação está bem definida, ou seja, devemos verificar que se $gG_x = hG_x$ então $g(x) = h(x)$. De fato, temos que $g \in hG_x$, de modo que $g = hk$, para algum $k \in G_x$. Logo $g(x) = hk(x) = h(k(x)) = h(x)$. Como a ação de G em X é transitiva, esta associação é sobrejetora. Além disto, se $g(x) = h(x)$, então $h^{-1}g \in G_x$, ou seja, $hG_x = gG_x$. \square

Note que até este momento considerando espaços G -homogêneos X sem qualquer estrutura adicional. Nestas condições, todo conjunto X é G -homogêneo se considerarmos $G = \mathcal{S}_X$ o grupo de permutações de X . No entanto, nestas circunstâncias, estamos na realidade estudando Teoria dos Conjuntos e a propriedade de ser G -homogêneo é de pouca valia. Assim, para se obter benefícios da Teoria de Grupos, geralmente se considera X como um espaço com uma estrutura adicional que deve ser preservada pela ação de G , como por exemplo a estrutura métrica (preservada por isometrias), a estrutura vetorial (preservada por transformações lineares) e assim por diante.

Capítulo 7

Apêndice 2: Isometrias de Espaços Euclidianos

É surpreendentemente difícil encontrar na literatura a construção detalha do grupo de isometrias dos espaços euclidianos. Assim, desenvolvemos com certo cuidado e relativamente bastante detalhes a construção do grupo de isometrias destes. O leitor atento poderá observar no final da seção o ressurgimento do produto semi-direto de dois subgrupos de um grupo dado, construção que foi observada na definição das classes de grupos B_n e D_n . Começamos retomando a definição já vista em nota de rodapé:

Definição 7.0.0.10 *Um Espaço Euclidiano $(\mathbb{E}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um par formado de um espaço vetorial real de dimensão \mathbb{E}^n e uma aplicação bilinear simétrica positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou seja, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica, bilinear e $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $0 \neq u \in \mathbb{E}$). Chamamos $\langle u, v \rangle$ de produto interno entre u e v e $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ de norma de u . Temos também uma métrica euclidiana associada definida por $d(u, v) = \|u - v\|$.*

Se considerarmos uma base arbitrária $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$, uma forma bilinear simétrica é definida, nesta base pela matriz $J = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1}^n$, ou seja, se $v = \sum \alpha_i e_i$ e $w = \sum \beta_i e_i$, então

$$\langle v, w \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Sendo J simétrica, esta é diagonalizável, ou seja, existe base $\beta' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ referente a qual a matriz da forma quadrática é da forma

$$\text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Como estamos tratando de uma forma positiva definida, devemos ter necessariamente todos os δ_i estritamente positivos. Assim, se trocarmos a base β' pela base

$$\left\{ f_1 = \frac{e'_1}{\langle e'_1, e'_1 \rangle}, \dots, f_n = \frac{e'_n}{\langle e'_n, e'_n \rangle} \right\}$$

temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida pela matriz identidade, ou seja, a menos da escolha de uma base conveniente, podemos assumir que $\langle v, w \rangle = \sum \alpha_i \beta_i$. Tal base é dita *ortonormal* (ortogonal, pois $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e normal pois $\langle f_i, f_i \rangle = 1$).

De modo geral, definimos o grupo ortogonal $O(\mathbb{E}^n)$ como o grupo das transformações lineares que preservam o produto interno dado. Não é difícil constatar que, fixada uma base e determinada a matriz J do produto interno nesta base, $O(\mathbb{E}^n)$ pode ser identificado com o conjunto das ma-

trizes $\{A \in M_{n \times n} \mid A^T J A = J\}$. De fato, se tivermos $[v] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ e $[w] =$

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ (coordenadas na base dada então

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= (A[v])^T J (A[w]) \\ &= [v]^T (A^T J A) [w]. \end{aligned}$$

Escolhendo v e w adequadamente, podemos constatar que

$$[v]^T (A^T J A) [w] = [v]^T J [w], \forall v, w$$

se e somente se $A^T J A = J$.

Mais ainda, se for dado um outro produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$, definido por uma matriz J^* , então $J^* = BJB^{-1}$ para alguma matriz B e $O(\mathbb{E}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle^*)$ é identificado com o grupo das matrizes

$$\{B^{-1}AB \mid A \in O(\mathbb{E}^n)\}.$$

Resumindo, o grupo de transformações lineares que preservam o produto interno é único, a menos de conjugação.

Consideramos então um espaço euclidiano \mathbb{E}^n . A métrica associada é $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$. Para construirmos o grupo de isometrias de \mathbb{E}^n começamos com as seguintes observações:

Observação 7.0.0.11 *Cada elemento $x \in \mathbb{E}^n$ determina uma translação $T_x(u) = x + u$. As translações são isometrias, pois $\|T_x(u) - T_x(v)\| = \|(x + u) - (x + v)\| = \|u - v\|$. Segue que o grupo de isometrias de \mathbb{E}^n age de maneira transitiva, pois dados $u, v \in \mathbb{E}^n$, $T_{u-v}(v) = u$.*

Observação 7.0.0.12 *Assim, os estabilizadores de cada ponto são conjugados. Logo, para conhecermos o estabilizador de qualquer ponto basta conhecermos o estabilizador de $u = 0$.*

Lema 7.0.0.13 *Uma transformação linear I preserva o produto interno se e somente se preserva a métrica associada.*

Demonstração: Assuma por hipótese que T preserva o produto interno. Temos então que

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &= \langle T(v), T(v) \rangle \\ &= \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} d^2(T(v), T(w)) &= \|T(v) - T(w)\|^2 \\ &= \|T(v - w)\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 \\ &= d(v, w), \end{aligned}$$

ou seja, T preserva a métrica associada.

Reciprocamente, vamos assumir que T preserva a métrica associada. Temos então que $d(0, v) = d(T(0), T(v)) \Rightarrow \|v\| = \|T(v)\|$ e segue que

$$\begin{aligned}\|T(v) - T(w)\|^2 &= \langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle \\ &= \|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2.\end{aligned}$$

Isolando o produto interno $\langle T(v), T(w) \rangle$, temos:

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \frac{\|T(v)\|^2 - \|T(v) - T(w)\|^2 + \|T(w)\|^2}{2}.$$

Como T preserva a norma, segue que

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \frac{\|v\|^2 - \|v - w\|^2 + \|w\|^2}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\|v\|^2 - \|v - w\|^2 + \|w\|^2}{2} = \langle v, w \rangle.$$

□

Lema 7.0.0.14 *Seja T uma transformação que preserva o produto interno e mantém fixa a origem. Então T é uma transformação linear.*

Demonstração: Para que T seja uma transformação linear, é suficiente termos $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ e $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$; $u, v \in \mathbb{E}^n$.

Como T preserva o produto interno, temos que

$$\begin{aligned}\langle T(v), T(\lambda w) \rangle &= \langle v, \lambda w \rangle \\ &= \lambda \langle v, w \rangle \\ &= \lambda \langle T(v), T(w) \rangle \\ &= \langle T(v), \lambda T(w) \rangle,\end{aligned}$$

e como esta relação é válida para qualquer v , podemos afirmar que $T(\lambda w) = \lambda T(w)$.

Novamente, como assumimos que T preserva o produto interno, temos que

$$\begin{aligned}\langle T(v+w), T(u) \rangle &= \langle v+w, u \rangle \\ &= \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle \\ &= \langle T(v), T(u) \rangle + \langle T(w), T(u) \rangle \\ &= \langle T(v) + T(w), T(u) \rangle,\end{aligned}$$

como esta relação é válida para qualquer que seja u , novamente podemos afirmar que $T(v+w) = T(v) + T(w)$. Segue então que T é linear. \square

Proposição 7.0.0.15 *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria. Então, $\phi(v) = v_0 + T(v)$, onde T é uma transformação linear ortogonal. Reciprocamente, toda transformação da forma $\phi(v) = v_0 + T(v)$, com T ortogonal, é uma isometria.*

Demonstração: Seja $v_0 = \phi(0)$. Como a translação T_{v_0} é isometria, temos que $\psi = T_{-v_0} \circ \phi$ é isometria se e somente se ϕ o for. Assim, sem perda de generalidade. Mas $\psi(0) = 0$ e pelos lemas e observações anteriores, ψ é uma isometria se e somente se tivermos $\psi(v) = T(v)$, onde T é transformação linear ortogonal. Segue então que

$$\phi(v) = T_{v_0} \circ T_{-v_0} \circ \phi(v) = T_{v_0} \circ \psi(v) = v_0 + T(v).$$

\square

Temos então que, como conjunto, o grupo de isometrias $\mathcal{I}(\mathbb{E}^n)$ pode ser identificado com o produto $\mathbb{E}^n \times O(n)$. No entanto, este não é um produto direto de grupo. Para isto, basta constatarmos que, uma transformação linear e uma translação não comutam: $T_w \circ T(v) = v_0 + T(v) \neq T(v_0) + T(v)$ se $T(v_0) \neq v_0$.

No entanto, o grupo das translações é normal em $\mathcal{I}(\mathbb{E}^n)$: De fato, como duas translações sempre comutam, basta verificarmos que o grupo das translações é invariante por elementos do grupo ortogonal. De fato, dado $v_0 \in \mathbb{E}^n$ e $T \in O(n)$, temos que

$$\begin{aligned}T^{-1} \circ T_{v_0} \circ T(v) &= T^{-1} \circ T_{v_0}(T(v)) \\ &= T^{-1}(v_0 + T(v)) \\ &= T^{-1}(v_0) + v \\ &= T_{T^{-1}(v_0)} + v.\end{aligned}$$

Segue então que $\mathcal{I}(\mathbb{E}^n)$ é o produto semi-direto $\mathbb{E}^n \rtimes O(n)$.

Dados dois elementos $(v, T), (w, S) \in \mathbb{E}^n \rtimes O(n)$, seu produto é definido como $(S(v) + w, TS)$ e o inverso de (v, T) é o elemento $(T^{-1}(-v), T^{-1})$. Verifique estas afirmações!

Bibliografia

- [BGS] Ballmann, W.; Gromov, M.; Schroeder, V. - *Manifolds of Nonpositive Curvature* - Birkhauser, 1985.
- [Br] Brown, Kenneth S. - *Buildings* - Springer Verlag, 1988.
- [Bo] Bourbaki, N. - *Groupes et Algèbres de Lie, ch. 4,5 e 6* - Masson, 1981.
- [Eb] Eberlein, Patrick - *Structure of manifolds of nonpositive curvature.*- in *Global Differential Geometry and Global Analysis 1984* (Berlin, 1984), 86–153, *Lecture Notes in Math.*, 1156, Springer, Berlin, 1985.
- [He] Helgason, Sigurdur - *Differential Geometry and Symmetric Spaces* - Academic Press, 1962.
- [Her] Herstein, I. N. - *Tópicos de Álgebra* - Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1970.
- [Hu] Humphreys, James E. - *Reflection Groups and Coxeter Groups* - Cambridge University Press, 1990.
- [Ly] Lyndon, Roger C. - *Groups and geometry* - London Mathematical Society Lecture Note Series, 101, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [MKS] Magnus, W., Karrass, A and Soliat, D. - *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations* - Interscience Publ., 1966.
- [Mo] Mostow, G. D. - *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces* - *Annals of Math. Studies*, No. 78, Princeton University Press, 1973.
- [Sc] Scharlau, R. - *Buildings* - in *Handbook of Incidence Geometry* (Ed. F. Buekenhout), pg. 477-646, North Holland, 1995.

- [Ro] Ronan, Mark - *Lectures on Buildings* - Perspectives in Mathematics No. 7, Academic Press, 1989.
- [Rot] Rotman, Joseph J. - *The Theory of Groups*, Allyn and Bacon Inc, 1973.
- [Ti] Tits, Jacques - *Building of Spherical Type and Finite BN-Pairs* - Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1974.
- [Zi]