ME-501 Processos estocásticos

Lista 4

1. Mostre que o processo $\{X(t)\}$ definido através das taxas ν_i e probabilidades de transição da cadeia de Markov imersa (saindo de i, vai para j com probabilidade P_{ij}, $P_{ii} = 0$, $\sum_j P_{ij} = 1$) é uma cadeia de Markov com tempo continuo.

2. Suponha que uma ameba pode estar em dois estados, A ou B. Quando a ameba está no estado A, vai passar para estado B depois de um tempo Exponencial com taxa α. Quando a ameba está no estado B, depois de um tempo Exponencial com taxa β vai se dividir em duas do tipo A. Defina uma cadeia de Markov apropriada para uma população destas amebas. Quais são os parâmetros?

3. Os clientes chegam a uma estação de serviços com um único servidor de acordo com um processo de Poisson com parâmetro λ. O cliente que chega e vê que já há outros n clientes na estação desiste e vai embora com probabilidade $1 - \alpha_n$, e entra na fila com probabilidade α_n. O tempo de serviço é exponencial com parâmetro μ. Descreva este modelo como um processo de nascimento e morte e dê as respetivas taxas.

4. Consideramos dois aparelhos, o tempo de vida de cada um deles é exponencial com parâmetro λ. Os aparelhos são independentes um do outro. Quando um aparelho quebra, o mecânico faz o reparo, que demora um tempo exponencial com parâmetro μ (tem apenas um mecânico para cuidar destes dois aparelhos). Descreva este processo como um processo de nascimento e morte. Escreva para ele as equações de Kolmogorov para trás e para frente (não é necessário resolver as equações).

5. Numa população cada individuo gera um filho com taxa λ e morre com taxa μ independentemente dos outros. Além disso, os individuos de fora estão imigrando para esta população com taxa θ, mas a imigração somente é permitida enquanto o tamanho da população não ultrapassa N. Descreva este modelo como um processo de nascimento e morte e dê as respetivas taxas.

6. Considere um processo de nascimento e morte com taxas $\lambda_i = (i+1)\lambda$, $i \geq 0$, e $\mu_i = i\mu$, $i \geq 1$. Calcule o tempo esperado para o processo ir de estado 2 ao estado 5.

7. Consideramos dois aparelhos. O aparelho i funciona um tempo exponencial com parâmetro λ_i, depois quebra e o tempo para repara-lo é exponencial com parâmetro μ_i, $i = 1, 2$. Os aparelhos são independentes um do outro. Defina uma cadeia de Markov com tempo contínuo com 4 estados que descreve o funcionamento deste sistema. Calcule as probabilidades de transição $P_{ij}(t)$ desta cadeia de Markov utilizando a independência dos aparelhos e verifique se estas probabilidades satisfazem as equações de Kolmogorov para frente e para trás.

8. Um cabeleireiro trabalha sozinho num salão pequeno, onde só cabem dois clientes (um que está sendo servido e outro esperando). Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa 3. Os tempos de serviço são independentes e tem distribuição exponencial com parâmetro 4. Calcule
(a) o número médio dos clientes no salão;
(b) a proporção dos clientes que conseguem entrar no salão.

9. Numa fábrica tem 3 máquinas e dois mecânicos para cuidar delas. Cada máquina funciona um tempo exponencial com parâmetro 5 e depois quebra independentemente das outras. Cada mecânico leva um tempo exponencial com parâmetro 6 para consertar uma máquina.
(a) Calcule o número médio das máquinas quebradas.
(b) Calcule o número médio das máquinas quebradas se em vez de 2 mecânicos tem apenas 1, mas que trabalha duas vezes mais rápido.

10. O seguinte problema surge na biologia. A superfície de uma bactéria tem alguns lugares onde uma (só uma) molécula (aceitável ou não) pode se fixar. As moléculas se aproximam de um destes lugares de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Entre estes moléculas a proporção de aceitáveis é α. As moléculas inaceitáveis permanecem junto a bactéria um tempo exponencial com parâmetro μ_1 e as aceitáveis um tempo exponencial com parâmetro μ_2. Qual é a proporção de tempo que o lugar está ocupado por uma molécula aceitável (inaceitável)?

11. Um mecânico toma conta das duas máquinas. A máquina i funciona um tempo exponencial com parâmetro λ_i, $i = 1, 2$. Quando máquina i quebra, ela precisa de tempo de reparo exponencial com parâmetro μ_i. O reparo da máquina 1 tem prioridade (se ela quebra, o mecânico para de trabalhar com máquina 2 e vai para máquina 1). Qual é a proporção de tempo que máquina 2 está quebrada?

12. Um homem tem namoradas em São Paulo, Rio de Janeiro e Salvador e vive viajando entre as 3 cidades. Quando ele está em São Paulo ou Rio, ele passa lá um tempo exponencial com média 2 semanas, e em Salvador ele passa um tempo exponencial com média 3 semanas. De São Paulo ele vai para Rio ou Salvador com probabilidade 1/2, de Rio vai para Salvador com probabilidade 3/4 ou para São Paulo com probabilidade 1/4, e de Salvador ele vai para São Paulo com probabilidade 1. Calcule a proporção de tempo que ele passa com cada namorada. Quantas viagens por ano, em média, ele faz de São Paulo para Rio?

13. Numa loja há 2 vendedores. Cada vendedor demora um tempo exponential com parâmetro μ para servir um cliente. Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Os vendedores trabalham da seguinte maneira. A fila é única. Um vendedor está sempre trabalhando, e o outro (ajudante) começa a trabalhar apenas quando tem 2 ou mais clientes no sistema (concluído o serviço e havendo menos que 2 clientes no sistema, ele descansa).
(a) Calcule P_n (probabilidades de ter n clientes no sistema).
(b) Qual é a proporção de tempo que o ajudante trabalha?
(c) Qual é o número médio de clientes na loja?
(d) Qual é o tempo médio de espera na fila?

14. Consideramos um sistema com 2 servidores. Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$. Quando um cliente chega e encontra os dois servidores vázios, ele vai para servidor 1 com probabilidade 1/3 ou para servidor 2 com probabilidade 2/3. Se apenas um servidor estiver vázio, o cliente vai para este servidor. Se os dois servidores estiverem ocupados, o cliente desiste e vai embora (portanto, não há espera na fila). Os tempos de serviço são exponenciais com taxas $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Depois que um cliente termina o serviço, ele vai embora do sistema (cada cliente só passa por um servidor). Calcule a proporção de clientes que conseguem entrar no sistema.

15. Os clientes chegam a um centro de serviços com 2 servidores de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Ao chegar, eles esperam na fila única o primeiro servidor livre. Os tempos de serviço são exponenciais com taxas μ_a e μ_b. Se um cliente chega e encontra os dois servidores vazios, ele vai para qualquer um com probabilidade 1/2. Descreva este processo como uma cadeia de Markov com estados $\{0, a, b, 2, 3, \ldots\}$, onde a (ou b) significa que tem apenas um cliente e ele está no servidor a (ou b). Mostre que o processo é reversível e calcule as probabilidades limite em termos de P_2.

16. Considere a seguinte variação do modelo M/M/1: taxa de chegadas de fora é λ, taxa de serviço é μ, mas o cliente que completa o serviço vai embora com probabilidade α, e vai para o fim da fila para ser servido de novo com probabilidade $1 - \alpha$.
(a) Escreve e resolve as equações de balanço. Quando a solução existe?
(b) Calcule o tempo médio de espera de um cliente para ser atendido pela primeira vez.
(c) Calcule a probabilidade de que o cliente vai ser servido exatamente n vezes.
(d) Calcule o tempo médio que o cliente passa no servidor (não incluindo o tempo de espera na fila). (Dica: use parte (c)).
(e) Qual é a distribuição de tempo total que um cliente passa no servidor?

17. Consideramos uma rede de 3 servidores. Clientes chegam a servidores $1, 2, 3$ de acordo com processos de Poisson com taxas $5, 10, 15$ respetivamente. Os tempos de serviço são exponentiais com parâmetros $10, 50, 100$ respetivamente. O cliente que completou o serviço no servidor 1 vai para servidor 2 ou 3 ou sai do sistema com probabilidades 1/3. O cliente que completou o serviço no servidor 2 sempre vai para o servidor 3. O cliente que completou o serviço no servidor 3 vai para o servidor 2 ou sai do sistema com probabilidades 1/2. Qual é o número médio de clientes no sistema? Qual é o tempo médio que um cliente passa no sistema?