ME-501 Processos estocásticos

Lista 3

1. Para o processo de Poisson, mostre que, para $s < t$,

$$\mathbf{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Homens e mulheres entram num supermercado de acordo com processos de Poisson independentes com as taxas 2 e 4 por minuto respetivamente. Começando num determinado momento s, seja Y o momento de chegada do segundo homem. Calcule a probabilidade que o número das mulheres que chegaram no intervalo (s, Y) é menor do que 3.

3. Sejam $\{N_i(t), t \geq 0\}$ dois processos de Poisson independentes com respetivas taxas λ_i, $i = 1, 2$. Seja $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Mostre que $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ e calcule a probabilidade que o primeiro evento do processo $N(t)$ é do processo $N_1(t)$.

4. Os carros passam num certo lugar de acordo com um processo de Poisson com taxa λ (por segundo). Pedro quer atravessar a rua ali e está esperando até ver que nenhum carro vai passar nos próximos T segundos.
(a) Calcule a probabilidade que o tempo de espera vai ser 0.
(b) Calcule o tempo médio de espera (dica: condicione no momento do primeiro evento do processo de Poisson).

5. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com taxa λ independente da v.a. T, onde $T \geq 0$, $\mathbf{E}\, T = \mu$, $\mathbf{Var}\, T = \sigma^2$. Calcule $\mathbf{E}\, N(T)$, $\mathrm{Cov}(T, N(T))$ e $\mathbf{Var}\, N(T)$.

6. Num experimento físico, as partículas entram num contador de Geiger de acordo com um processo de Poisson com taxa 3. Cada partícula é registrada com probabilidade $2/3$. Seja $X(t)$ o número de partículas registradas até o tempo t. Calcule $\mathbf{P}(X(t) = 0)$ e $\mathbf{E}$X(t).

7. Uma empresa tem dois tipos dos clientes. Clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ, e cliente que chega no momento t é do tipo 1 com probabilidade $P_1(t) = e^{-t}$ e do tipo 2 com probabilidade $P_2(t) = 1 - e^{-t}$. Seja $N_1(t)$ o número dos clientes do tipo 1 que chegaram no intervalo $(0, t)$. Calcule a disribuição de $N_1(t)$.

8. Considere uma estação de serviços com um número infinito de servidores, onde os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa λ e os tempos de serviço são Exponencias com taxa μ (indepedentes). Seja $X(t)$ número de clientes no sistema no tempo t e $Y(t)$ o número de clientes que já passaram pelo sistema (entraram e terminaram o serviço) até o tempo t. Calcule $\mathbf{E}(X(t + s) \mid X(s))$ e $\mathbf{E}(X(t) \mid Y(t) = n)$.
Dica: divida os clientes que estão no sistema no tempo $t + s$ em dois grupos: “antigos” e “novos”.