ME-501 Processos estocásticos

Lista 0

1. Sejam A e B eventos disjuntos tais que $\mathbf{P}(A) = 0.3$ e $\mathbf{P}(B) = 0.5$. Qual é a probabilidade que
(a) A ou B ocorra;
(b) A ocorra, mas B não ocorra;
(c) repita (a) e (b) se os eventos forem independentes.

2. Considere duas urnas, a urna A e a urna B. Urna A contem 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. Urna B contem 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é retirada da urna A e colocada na urna B. Depois, uma bola é retirada da urna B.
(a) Qual é a probabilidade de que uma bola retirada da urna B seja vermelha?
(b) Se uma bola vermelha é retirada da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido retirada da urna A?

3. Demonstre as seguintes afirmações:
(a) Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(b) Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
(c) Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$;
(d) Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo.

4. Suponha que o número de vezes que uma pessoa fica resfriada durante um ano tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Um novo remédio para prevenir resfriados reduz este parâmetro para $\lambda' = 2$ para 75% das pessoas e não faz efeito em 25% restantes. Se uma pessoa tomou este remédio durante um ano e pegou resfriado 2 vezes, qual é a probabilidade de que o remédio funciona para esta pessoa?

5. Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \quad\quad \text{caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k.
(b) Calcule $\mathbf{P}(1/4 < X < 1/2)$.
(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(e^X)$.
(d) Determine a f.d.a. de X.

6. O tempo que um aparelho de TV funciona (até quebrar) tem distribuição Exponencial com média 8 anos. Se José comprou um aparelho de TV usado, calcule a probabilidade de que este aparelho vai durar pelo menos mais 4 anos.

7. Na fabricação de parafusos, os parafusos tem que ter diâmetro entre d_1 e d_2, senão eles são considerados defeituosos. Para controle de qualidade é feito um teste "passa - não passa", o parafuso é aceito, se ele não passa numa abertura de diâmetro d_1, mas passa numa abertura de diâmetro d_2. Suponha que o diâmetro D de um parafuso é uma v.a. Normal com média $(d_1 + d_2)/2$ e variância $(d_2 - d_1)^2/16$.
(a) Ache a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.
(b) Se, em vez de saber a variância, você sabe que $d_1 = 40$ mm, $d_2 = 50$ mm e que 10% dos parafusos são rejeitados, quanto valeria $\mathrm{Var}\, D$?

8. Suponha que o raio R de uma esfera seja uma v.a. contínua com densidade

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ache a densidade do volume V e da área superficial S da esfera.

9. Seja X uma v.a. com f.d.a. F_X.
(a) Seja $Y = 1 + bX$, $b < 0$. Ache a f.d.a. de Y.
(b) Suponha que F_X é estritamente monótona e defina $Z = F_X(X)$. Mostre que $Z \sim U(0, 1)$.
(c) Tome $U \sim U(0, 1)$ e mostre que $W = F_X^{-1}(U)$ tem f.d.a. F_X.

10. Seja U v.a. Uniforme $(0, 1)$ e $X = \ln U$. Usando a função geratriz de momentos, calcule $\mathbb{E}X$ e $\operatorname{Var} X$.

11. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + 2y), & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se X e Y são independentes. Calcule:
(a) o valor de c;
(b) a densidade de X;
(c) $\mathbf{P}(X < Y)$;
(d) $\mathbf{P}(X + Y < 1)$.

12. Sejam X_1, X_2, X_3 v.a. i.i.d. exponenciais com parâmetro $\lambda = 1$. Calcule:
(a) $\mathbf{P}(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a)$;
(b) $\mathbf{P}(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a)$;
(c) densidade de $Z = \min\{X_1, X_2, X_3\}$.

13. A nota final dos alunos de ME 310 é uma v.a. com média 5.5.
(a) Obtenha uma cota superior para a probabilidade de tirar nota acima de 7.0.
(b) Além da média, sabe-se que a variância da nota final é 2.5. Quantos alunos deve ter na turma, para que a nota média da turma esteja entre 5.0 e 6.0 com probabilidade pelo menos 0.95 (sem usar teorema central do limite)?

14. Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes, X_i tem distribuição de Poisson com parâmetro λ_i, $i = 1, 2$. Seja $Z = X_1 + X_2$. Calcule a distribuição condicional de X_1 dado que $Z = n$.

15. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})}, & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

16. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por $f(x, y) = 2e^{-2x}/x$, se $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$ (e $f(x, y) = 0$, caso contrário). Calcule $\mathbb{E}(Y^3 \mid X)$.

17. Uma moeda viciada, com $\mathbf{P}(\text{cara}) = p$ é lançada até obter 2 caras seguidas. calcule o número médio dos lançamentos necessários.

18. Suponha que X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, onde λ é uma v.a. Exponencial com parâmetro 1. Mostre que $\mathbf{P}(X = n) = (1/2)^{n+1}$.

19. Ache o limite (quase certo) da sequência $Y_1, Y_2, \ldots$ onde

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1^\alpha + \ldots + X_n^\alpha),$$

$X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. Uniformes $(0, 1)$ e $\alpha > 0$.

20. O número dos dias que uma certa componente funciona até falhar é uma v.a. com densidade $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$. A componente que falha é reposta imediatamente. Quantas componentes precisamos ter no estoque para que a probabilidade de que o estoque vai durar pelo menos 35 dias seja 0.95?