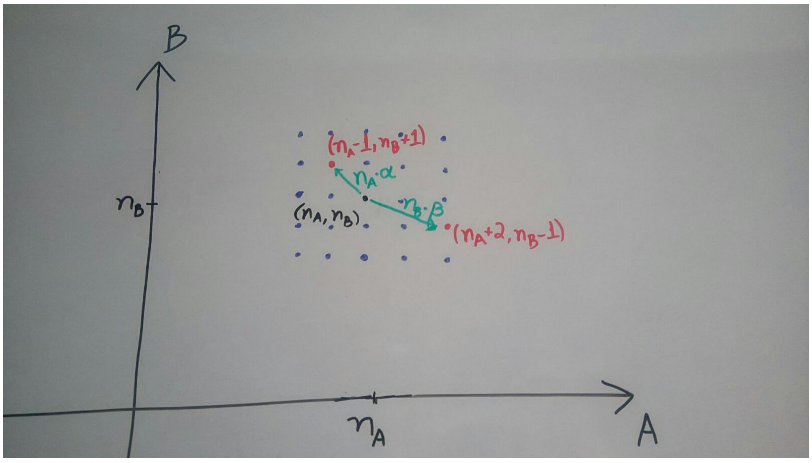
Lista 4 - Gabarito

1) $X(t)$ definido através de v_i, P_{ij} $\forall i, j$ é uma CM a tempo continuo?
Precisamos: $P(X(t) = j \mid X(s) = i, X(u) = X_u, 0 \leq u < s) = P(X(t) = j \mid X(s) = i)$
tempo no $i \sim exp(v_i) \Rightarrow$ falta de memória e quando sai de i vai $\forall l$ com probabilidade P_{il} não dependendo do passado.

2) Vamos considerar que o estado do processo é $(n_A; n_B)$, onde n_A é o número de amebas no estado A, n_B é o número de amebas no estado B.
Temos o gráfico com as taxas de transição em duas dimenções:



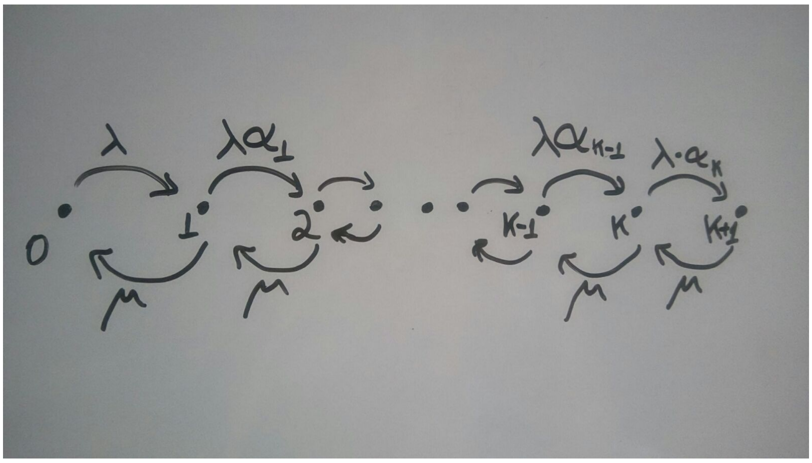
$A \rightarrow B$

$$P_{(n_A;n_B),(n_A-1;n_B+1)} = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$
Ou seja, essa é a transição de uma ameba A para uma ameba B.
Por outro lado,

$B \rightarrow 2A$

$$P_{(n_A;n_B),(n_A+2;n_B-1)} = \frac{n_B}{n_A + n_B}$$
Ou seja, essa é a transição de uma ameba B para duas amebas A.

3) Podemos observar as taxas no grafo:



Essa taxas são devido a:

O cliente não fica na fila com certeza. Ele entra com probabilidade α_n, dependendo do tamanho da fila. Então:

$\lambda_n = \lambda\alpha_n$

A taxa de servico permanece constante:

$\mu_n = \mu$

Assim,

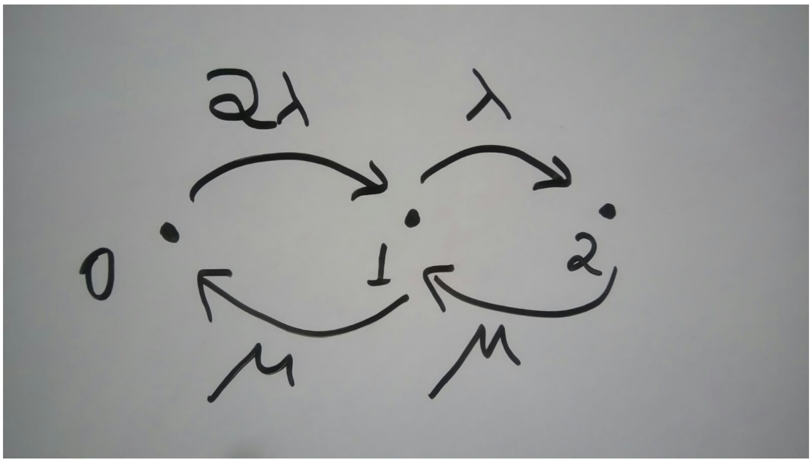
$v_0 = \lambda; v_i = \lambda\alpha_i + \mu$

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda\alpha_i}{\lambda\alpha_i + \mu}, i \geq 1$$

$$P_{0,1} \quad = 1$$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda\alpha_i + \mu}, i \geq 1$$

4) O processo pode ser descrito como um nascimento-morte com os seguintes parâmetros:



$\mu_n = \mu$

$\lambda_n = (2-n)\lambda$, se $n \in \{0,1\}$

$\lambda_n = 0$ se $n \notin \{0,1\}$

Dizemos que o processo está no estado n quando temos n máquinas fora de uso.

Eq. de Kolmogorov para trás pode ser definida por $P_t' = QP_t$:

$P_{0j}'(t) = 2\lambda P_{1j}(t) - 2\lambda P_{0j}(t)$

$P_{1j}'(t) = \lambda P_{2j}(t) - (\lambda+\mu)P_{1j}(t)$

$P_{2j}'(t) = \mu P_{1j}(t) - \mu P_{2j}(t)$

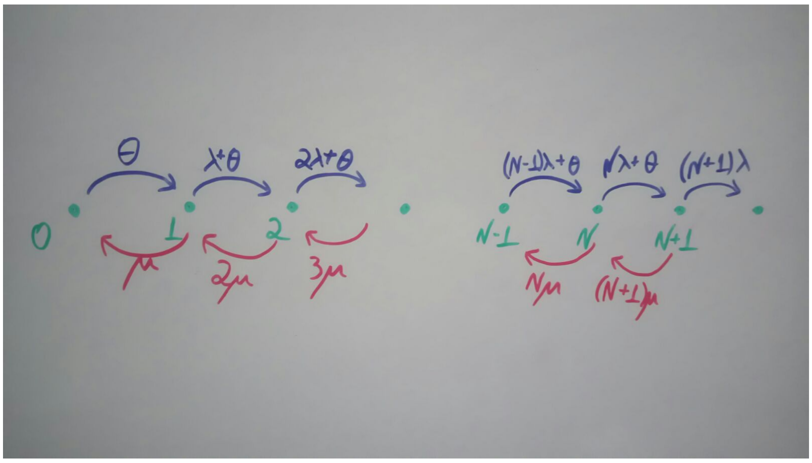
Eq. de Kolmogorov para frente pode ser definida por $P_t' = P_tQ$:

$P_{i0}'(t) = \mu P_{i1}(t) - 2\lambda P_{i0}(t)$

$P_{i1}'(t) = 2\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i2}(t) - (\lambda+\mu)P_{i1}(t)$

$P_{i2}'(t) = \lambda P_{i1}(t) - \mu P_{i2}(t)$

5) Seja X(t) = tamanho da população no tempo t.



$\lambda_n = n\lambda + \theta$, para $n = 0, 1, ..., N$ $\quad$ $\lambda_n = n\lambda$, para $n > N$

$\mu_n = n\mu$

6) Queremos o tempo esperado para o processo ir do estado 2 ao estado 5.

$$\lambda_i = (i+1)\lambda \quad \mu_i = i\mu$$

$$E(tempo\ para\ ir\ de\ 2\ a\ 5) = E(T_2) + E(T_3) + E(T_4)$$

$$E(T_0) = \frac{1}{\lambda}\ ,\ E(T_1) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda^2}$$

$$E(T_2) = \frac{2!(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu))}{3!\lambda^3}\ ,\ E(T_3) = \frac{3!(\lambda^3 + \mu(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu)))}{4!\lambda^4}$$

$$E(T_4) = \frac{4!(\lambda^4 + \mu(\lambda^3 + \mu(\lambda^2 + \mu(\lambda + \mu))))}{5!\lambda^5}$$

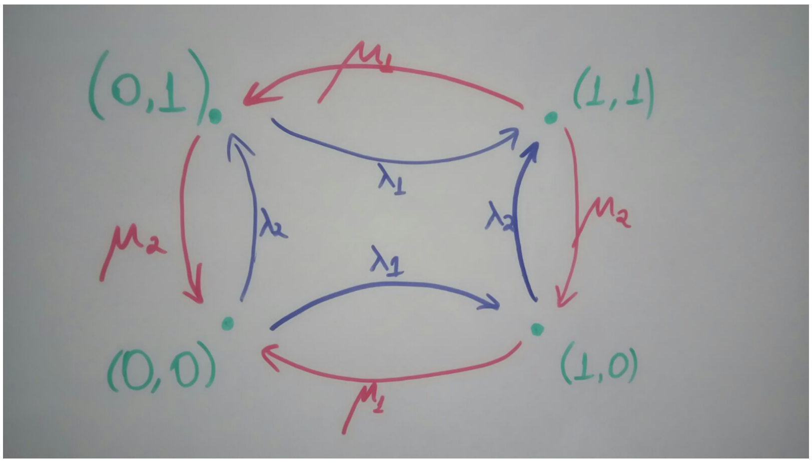
7)Vamos considerar esse processo uma cadeia de Markov com os seguintes estados:(0,0), (0,1), (1,0) e (1,1), em que (0,1) indica que o primeiro aparelho não funciona e o segundo aparelho funciona.

Como os aparelhos são independentes, podemos considerar que:

$P_{(i,j),(n,m)}(t) = P^1_{(i,n)}(t)P^2_{(j,m)}(t)$

em que P_i é a probabilidade de transição do aparelho i, sendo $i = 1, 2$.

Ilustramos, a seguir, os 4 estados dessa cadeia de Markov e suas respectivas taxas de transição:



As probabilidades de transição são as seguintes, para $i = 1, 2$:

$$P^i_{00}(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}e^{-(\lambda_i+\mu_i)t} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad P^i_{01}(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$$

$$P^i_{10}(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} - \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}e^{-(\lambda_i+\mu_i)t} \quad P^i_{11}(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$$

Vamos demonstrar para a equação de Kolmogorov para trás, dada pela seguinte fórmula:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_iP_{ij}(t)$$

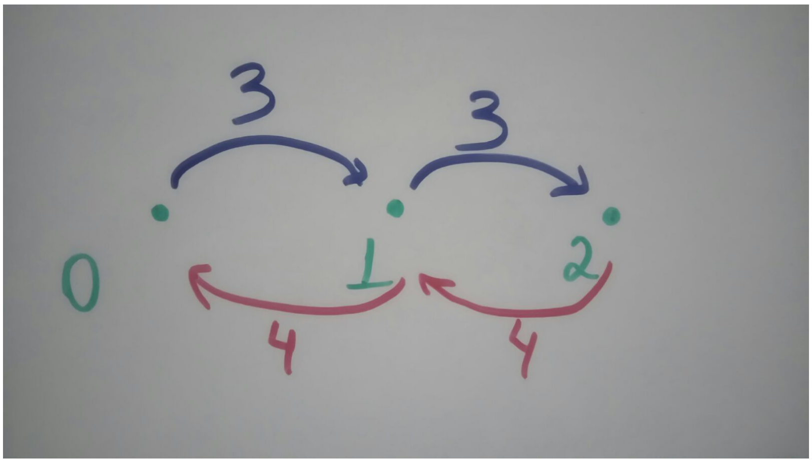
onde q_{ik} é a taxa de transição de i para k e v_i a taxa total de saida de i.
Daí, vamos calcular para $P'_{(0,0),(0,1)}(t)$ e demonstrar que satisfaz a equação de Kolmogorov para trás. Os outros estados e a equação de Kolmogorov para frente são análogos.

Neste caso, $i = (0,0), j = (0,1)$. (1,1) não é acessível de (0,0)

$$\begin{aligned}
P'_{(0,0),(0,1)}(t) &= \lambda_2 P_{(0,1),(0,1)}(t) + \lambda_1 P_{(1,0),(0,1)}(t) - (\lambda_1+\lambda_2)P_{(0,0),(0,1)}(t) \\
&= \lambda_2 P^1_{(0,0)}(t)P^2_{(1,1)}(t) + \lambda_1 P^1_{(1,0)}(t)P^2_{(0,1)}(t) - (\lambda_1+\lambda_2)P^1_{(0,0)}(t)P^2_{(0,1)}(t) \\
&= \lambda_1(P^1_{10}P^2_{01} - P^1_{00}P^2_{01}) + \lambda(P^1_{00}P^2_{11} - P^1_{00}P^2_{01}) \\
&= P^2_{01}\lambda_1(P^1_{10} - P^1_{00}) + P^1_{00}\lambda(P^2_{11} - P^2_{01}) \\
&= P^2_{01}P'^1_{00} + P^1_{00}P'^2_{01}
\end{aligned}$$

Substituindo as probabilidades de transição, dadas acima, nas equações acima, partindo da primeira linha deveremos chegar na regra do produto da derivada da última linha e assim demonstramos que satisfaz a equação de Kolmogorov.

8) Temos os estados 0, 1 e 2 que são a quantidade de clientes dentro do salão



$q_{i,i+1} = 3$, $i = 0,1$

$q_{i,i-1} = 4$, $i = 1,2$

$v_0 = 3$, $v_1 = 7$, $v_2 = 4$

$P_{0,1} = 1$, $P_{1,0} = \frac{4}{7}$, $P_{1,2} = \frac{3}{7}$, $P_{2,1} = 1$

Com as equações de balanço:
$3P_0 = 7P_1\frac{4}{7}$
$7P_1 = 3P_0 + 4P_2$
$4P_2 = 7P_1\frac{3}{7}$
$P_0 + P_1 + P_2 = 1$

Temos que:
$P_0 = \frac{16}{37}$, $P_1 = \frac{12}{37}$, $P_2 = \frac{9}{37}$

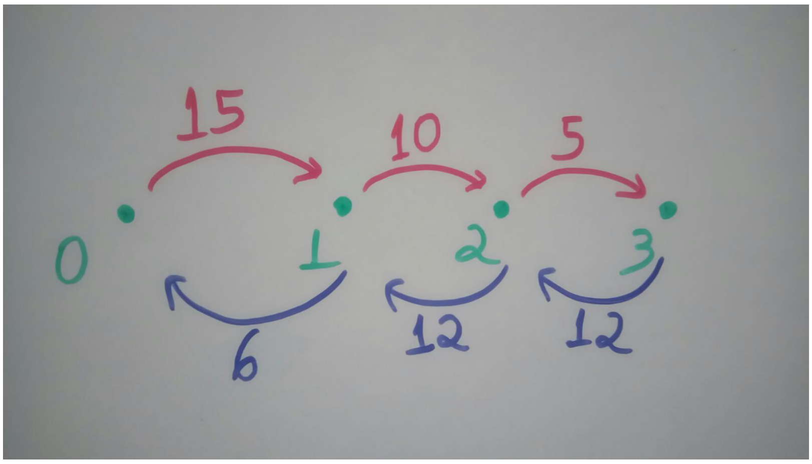
$$L = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = 1P_1 + 2P_2 = \frac{30}{37}$$

a)Número médio de clientes é $L = \frac{30}{37}$

b)A proporção de clientes que entram no salão é $1 - P_2$ já que P_2 é a única situação em que os clientes não entram.Então:

$1 - \frac{9}{37} = \frac{28}{37}$

9) Como as máquinas quebram e são consertadas independentemente, os estados são: 0, 1, 2 ou 3 máquinas quebradas. E temos as taxas:



$q_{01} = 15$(3 máquinas para quebrar)
$q_{10} = 6$(1 máquinas sendo consertada)
$q_{12} = 10$(2 máquinas para quebrar)
$q_{21} = 12$(2 máquinas sendo consertadas)
$q_{23} = 5$(1 máquina para quebrar)
$q_{32} = 12$(2 máquinas sendo consertadas)
$q_{ij} = 0$, outros casos

Resolvendo as equações de balanço, temos:

$$P_0 = \frac{864}{5574} \ , \ P_1 = \frac{2160}{5574} \ , \ P_2 = \frac{1800}{5574} \ , \ P_3 = \frac{750}{5574} \ ,$$

a) Número médio de máquinas quebradas é:

$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{8010}{5574} \cong 1.43$

b) Com a mudança nas taxas, temos:

$q_{i,i-1} = 12$, $i = 1, 2, 3$, os outros casos continuam iguais.

Resolvendo as equações de balanço, agora temos:

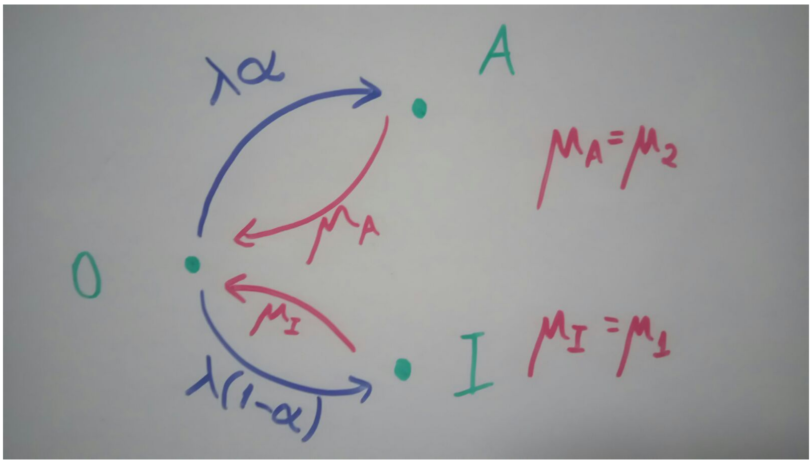
$$P_0 = \frac{1728}{6438} \ , \ P_1 = \frac{2160}{6438} \ , \ P_2 = \frac{1800}{6438} \ , \ P_3 = \frac{750}{6438} \ ,$$

Número médio de máquinas quebradas é:

$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{3750}{6438} \cong 1.24$

10) Estados:
0 - Lugar Vazio
A - espaço ocupado por molécula aceitável
I - espaço ocupado por molécula inaceitável

Queremos P_A e P_I



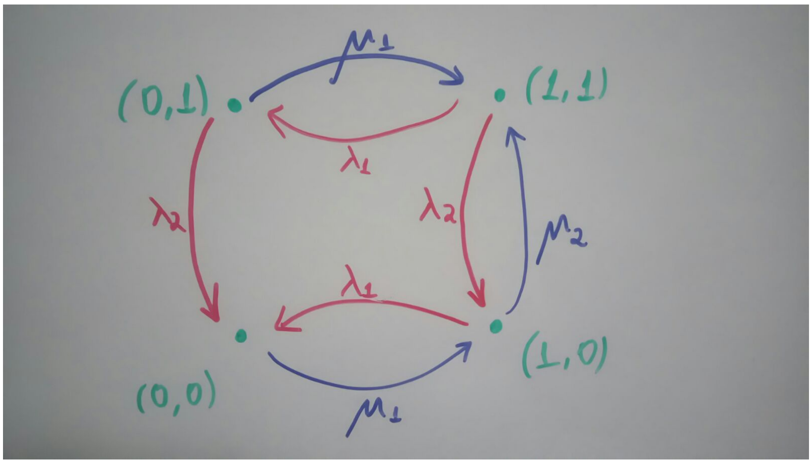
Equações de balanço:
$\lambda P_0 = \mu_A P_A + \mu_I P_I$

$\mu_A P_A = \lambda\alpha P_0$
$\mu_I P_I = \lambda(1-\alpha) P_0$
$P_0 + P_I + P_A = 1$

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda\alpha}{\mu_A}+\frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}} \;,\; P_A = \frac{\lambda\alpha}{\mu_A}\frac{1}{1+\frac{\lambda\alpha}{\mu_A}+\frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}} \;,\; P_I = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}\frac{1}{1+\frac{\lambda\alpha}{\mu_A}+\frac{\lambda(1-\alpha)}{\mu_I}}$$

11) Temos os estados:
(0,0) Ambas maquinas quebradas
(1,0) Maquina 1 funcionando e maquina 2 quebrada
(0,1) Maquina 2 funcionando e maquina 1 quebrada
(1,1) Ambas funcionando

Diante disso temos as taxas:
$q(0,0)(1,0) = \mu_1$
$q(0,1)(0,0) = \lambda_2$
$q(0,1)(1,1) = \mu_1$
$q(1,0)(0,0) = \lambda_1$
$q(1,0)(1,1) = \mu_2$
$q(1,1)(0,1) = \lambda_1$
$q(1,1)(1,0) = \lambda_2$



E ainda,
$v(0,0) = \mu_1$
$v(0,1) = \lambda_2 + \mu_1$
$v(1,0) = \lambda_1 + \mu_2$
$v(1,1) = \lambda_1 + \lambda_2$

Temos o sistema:
$\mu_1 P(0,0) = \lambda_2 P(0,1) + \lambda_1 P(1,0)$
$(\lambda_2 + \mu_1)P(0,1) = \lambda 1 P(1,1)$
$(\lambda_1 + \mu_2)P(1,0) = \mu_1 P(0,0) + \lambda_2 P(1,1)$
$(\lambda_1 + \lambda_2)P(1,1) = \mu_1 P(0,1) + \mu_2 P(1,0)$
$P(0,0) + P(1,0) + P(0,1) + P(1,1) = 1$
A proporção de tempo que a máquina 2 está quebrada é dada por P(0,0) + P(1,0)

12)Temos os estados :
R – Rio
SP – Sao Paulo
Sal - Salvador

Como no enunciado fala sobre as médias, e sabemos que: $q_{i,j} = v_i P_{i,j}$

Logo, temos as taxas:
$q_{Sal,SP} = \frac{1}{3}$
$q_{R,Sal} = \frac{3}{8}$
$q_{R,SP} = \frac{1}{8}$
$q_{SP,Sal} = \frac{1}{4}$
$q_{SP,R} = \frac{1}{4}$
$v_R = \frac{1}{2}$
$v_{Sal} = \frac{1}{3}$
$v_{SP} = \frac{1}{2}$

Temos portanto o sistema:
$\frac{1}{3}P_{Sal} = \frac{3}{8}P_R + \frac{1}{4}P_{SP}$
$\frac{1}{2}P_R = \frac{1}{4}P_{SP}$
$\frac{1}{2}P_{SP} = \frac{1}{3}P_{Sal} + \frac{1}{8}P_R$
$P_{Sal} + P_R + P_{SP} = 1$

Resolvendo-o obtemos:
$P_{Sal} = \frac{21}{45}$
$P_R = \frac{8}{45}$
$P_{SP} = \frac{16}{45}$

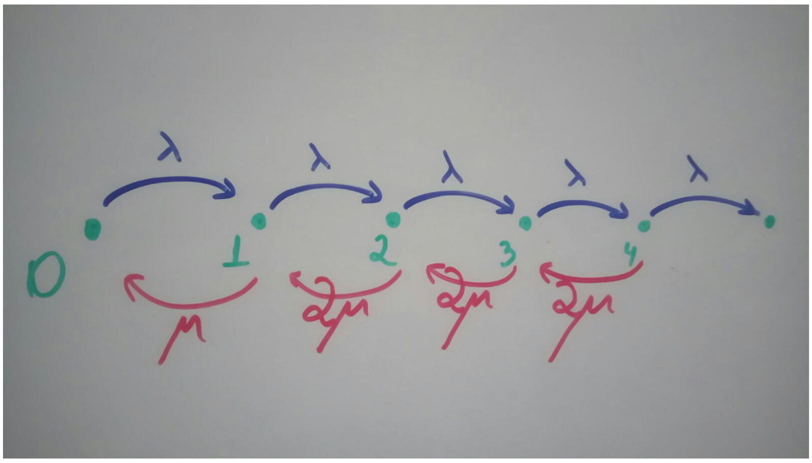
Que representam as proporções de tempo em Salvador, Rio e São Paulo respectivamente.

Para saber quantas viagens de São Paulo para o Rio são feitas, fazemos:
$P_{SP,R}P_{SP} = \frac{1}{2}\frac{16}{45} = \frac{16}{90}$

Isso representa o número médio de viagens por semana. Multiplicamos por 52 para obter o número médio por ano:
$\frac{16}{90}52 = 9.244$

Número médio de viagens de São Paulo para o Rio por ano é 9.244.

13)Consideramos como estados o número de clientes no sistema. Desse modo temos:



$v_0 = \lambda$
$v_1 = \lambda + \mu$
$v_i = \lambda + 2\mu$ para $i \geq 2$
e ainda:
$P_{0,1} = 1$
$P_{1,0} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$
$P_{1,2} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$ E a partir daí:
$P_{i,i-1} = \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}$
$P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}$

Com isso montamos o sistema a partir da equação: $v_j P_j = \sum_k v_k P_{k,j} P_k$
$\lambda P_0 = \mu P_1$
$(\mu + \lambda)P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$
$(2\mu + \lambda)P_i = \lambda P_{i-1} + 2\mu P_{i+1}$ para $i \geq 2$
$\sum_i P_i = 1$

Resolvendo:
$P_0 = P_0$
$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$
$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$
$P_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} P_0$ generalizando:
$P_i = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \frac{1}{2^{i-1}} P_0$

a-) Sabemos que $\sum_i P_i = 1$

Logo $P_0 = 1 - \sum_{i=1} P_i$

Fica claro que $\sum_{i=1} P_i$ é uma PG com $q = \frac{\lambda}{2\mu}$. Portanto $\sum_{i=1} P_i = \frac{P_1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{2\lambda P_0}{2\mu-\lambda}$

Logo $P_0 = 1 - \frac{2\lambda P_0}{2\mu-\lambda}$
$P_0 = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu-\lambda}$

Tendo $Pn = \frac{\lambda^n}{\mu^n}\frac{1}{2^{n-1}}P0$ fica evidente que:
$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{2\mu-\lambda}{2\mu-\lambda}$

b-) Para resolver esse Problema deveremos resolver a equação:

$P_a = 1 - P_0 - P_v$

Sendo P_v a probabilidade de um cliente ser atendido pelo vendedor principal e P_a a probabilidade de um cliente ser atendido pelo auxiliar.

Sabemos que $P_1 = P_a + P_v$

Consideramos os estados :
0 – Nenhum cliente na loja
a – apenas atendente a ocupado
v – apenas atendente v ocupado
2 – 2 pessoas na loja

Temos:
$v_0 = \lambda$
$v_a = \lambda + \mu$
$v_v = \lambda + \mu$
$v_2 = 2\mu$
$q_{(0,v)} = \lambda$
$q_{(v,0)} = \mu$
$q_{(v,2)} = \lambda$
$q_{(a,0)} = \mu$
$q_{(a,2)} = \lambda$
$q_{(2,v)} = \mu$
$q_{(2,a)} = \mu$

Formulamos o sistema:
$(\lambda + \mu)P_a = \mu P_2$
$(\lambda + \mu)P_v = \lambda P_v + \mu P_2$
$P_a + P_v = P_1$ (sendo P_1 a probabilidade de ter uma pessoa na loja).

Resolvendo o sistema obtemos:
$Pv = \frac{\lambda P_0(\frac{\lambda}{2}+\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}$

E resolvendo $P_{(ajudantetrabalha)} = 1 - P_0 - P_v$

Temos $P_{(ajudantetrabalha)} = \frac{\mu(\mu+\lambda) - P_0\mu(\mu+\lambda) - P_0\lambda(\frac{\lambda}{2})}{\mu(\mu+\lambda)}$ que é a proporção desejada.

c)$L = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \frac{4\frac{\lambda}{\mu}}{(\frac{\lambda}{\mu}-2)^2}$

d)$\frac{L}{\lambda_a} = \frac{4}{\mu(\frac{\lambda}{\mu}-2)^2}$

14) Como todas as taxas são as mesmas, independe do servidor que o cliente é atendido, única coisa que importa é a quantidade máxima de clientes.

Temos os estados:
0 - Nenhum cliente
1 - 1 cliente
2 - 2 clientes
E as taxas:
$q_{i,i+1} = 1$ para $i = 0, 1$
$q_{1,0} = 2$
$q_{2,1} = 4$

Usamos o sistema:
$P_0 = 2P_1$
$P_1 = 4P_2$
$P_0 + P_1 + P_2 = 1$

E obtemos:
$P_0 = 1/13$ $P_1 = 4/13$ $P_2 = 8/13$

A proposrção de clientes que entram no sistema é $1 - P_2 = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$

15)Para verificar se a cadeia é reversível, checamos se existe um conjunto de valores que satisfaz:
$P_i q_{ij} = P_j q_{ji}$ e $\sum_i P_i = 1$

Calculamos tudo em função de P_2:
$P_2 = P_2$

Para P_a:
$\lambda P_a = \mu_b P_2$ logo:
$P_a = \frac{\mu_b}{\lambda} P_2$

Para P_b, analogamente: $P_b = \frac{\mu_a}{\lambda} P_2$

Para P_0:
$\frac{\lambda}{2} P_0 = \mu_a P_a$ e

$\frac{\lambda}{2}P_0 = \mu_b P_b$
logo: $P_0 = \dfrac{2\mu_a\mu_b}{\lambda}P_2$

Para P_3:
$(\mu_a+\mu_b)P_3 = \lambda P_2$
logo: $P_3 = \frac{\lambda}{(\mu_a+\mu_b)}P_2$
Para P_4:
$(\mu_a+\mu_b)P_4 = P_3$
logo: $P_4 = \frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b}P_3 = (\frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b})^2 P_2$

Verificamos que para $n \geq 2$:
$P_n = (\frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b})^{n-2}P_2$

Resta verificar que $\sum_i P_i = 1$

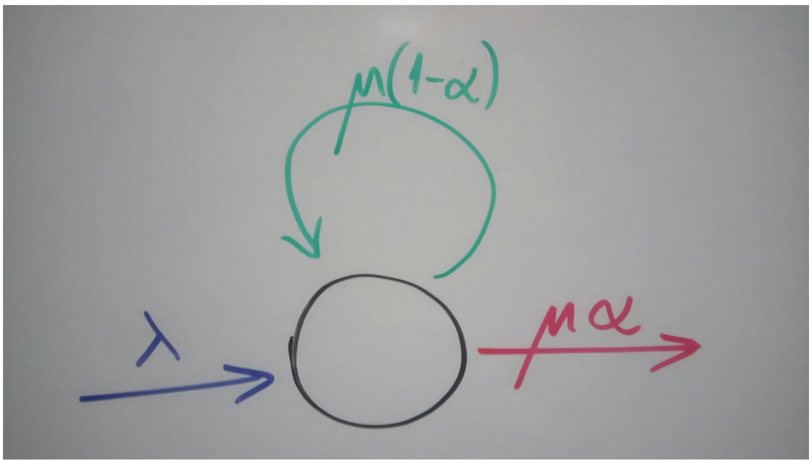
Verificando: $\sum_i P_i = P_2(\dfrac{2\mu_a\mu_b}{\lambda} + \frac{\mu_a}{\lambda} + \frac{\mu_b}{\lambda} + \sum_{i=2}(\frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b})^{n-2})$

Sabemos que $\sum_{i=2}(\frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b})^{n-2} = \frac{\mu_a+\mu_b}{\mu_a+\mu_b-\lambda}$

Dessa forma descobrimos que a soma converge para $\lambda < \mu_a + \mu_b$

E descobrimos que a distribuição estacionária é dada por:
$P_0 = \dfrac{2\mu_a\mu_b}{\lambda}P_2$, $P_a = \frac{\mu_b}{\lambda}P_2$, $P_b = \frac{\mu_a}{\lambda}P_2$
$P_n = (\frac{\lambda}{\mu_a+\mu_b})^{n-2}P_2$, para $n \geq 2$

16) a) $P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\mu\alpha+\lambda}$
$P_{i,i-1} = \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha+\lambda}$
$v_0 = \lambda$ e $v_1 = \lambda + \mu\alpha$



Escrevemos o sistema:
$\lambda P_0 = \mu\alpha P_1$
$(\mu\alpha + \lambda)P_1 = \lambda P_0 + \mu\alpha P_2$
$(\mu\alpha + \lambda)P_2 = \lambda P_0 + \mu\alpha P_3$
...
$(\mu\alpha + \lambda)P_i = \lambda P_{i-1} + \mu\alpha P_{i+1}$

Resolvendo o sistema, obtemos:
$P_n = (\dfrac{\lambda}{\mu\alpha})^n(1 - \dfrac{\lambda}{\mu\alpha})$
$P_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu\alpha}$
A solução existe para $\lambda < \mu\alpha$

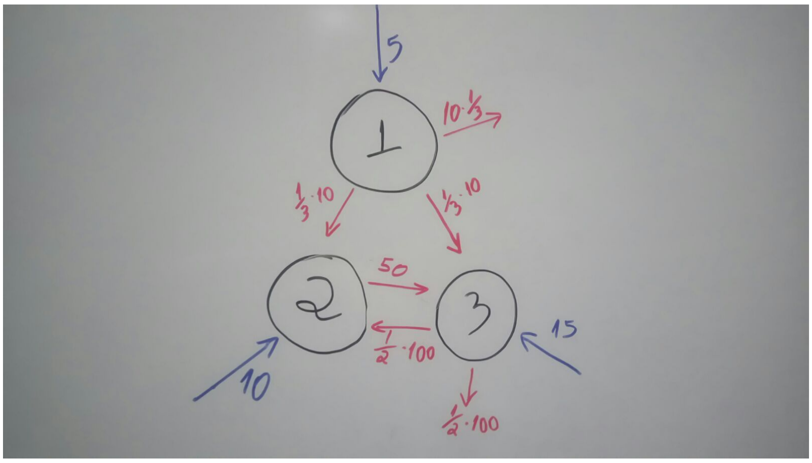
b) Tempo médio de espera de um cliente ser atendido pela primeira vez $=W_Q$=tempo médio de espera na fila
$W_Q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu\alpha - \lambda}$

c) Para o cliente ser servido n vezes ele deve entrar, ser servido e depois voltar ao final da fila $(n-1)$ vezes com probabilidade $(n-\alpha)$, assim:
$P(\text{ser servido n vezes}) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$

d) Sabemos pela letra c) que $P(serservidonvezes) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$ é uma geométrica com média $\frac{1}{\alpha}$ e o tempo de serviço tem média $\frac{1}{\mu}$
Dessa forma tempo médio que o cliente passa no servidor é dado por: $\frac{1}{\mu\alpha}$

e) Se temos n clientes, o cliente chegou então temos (n+1)
O tempo de serviço é exp (μ), independente.
Dessa forma o tempo total é igual a soma de (n+1) exp (μ) independentes.
Isso é igual a $gamma(n+1, \mu)$

17)De acordo com o enunciado, temos que:



$r_1 = 5$, $r_2 = 10$, $r_3 = 15$
$\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 50$, $\mu_3 = 100$
Número médio de clientes no sistema $L = \sum_{j=1}^{a} \dfrac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}$
$\sum_{j=1}^{3} P_{ij} \leq 1$
$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{a} \lambda_i P_{ij}$
Onde P_{ij} é a probabilidade de sair do servidor i e ir para o servidor j, temos:
$P_{12} = 1/3$, $P_{13} = 1/3$, $P_{23} = 1$, $P_{32} = 1/2$, o restante é 0.

Escrevendo o sistema:
$\lambda_1 = r_1 + \lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{21} + \lambda_3 P_{31}$
$\lambda_2 = r_2 + \lambda_1 P_{12} + \lambda_2 P_{22} + \lambda_3 P_{32}$
$\lambda_3 = r_3 + \lambda_1 P_{13} + \lambda_2 P_{23} + \lambda_3 P_{33}$

Resolvendo o sistema, obtemos:
$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 40$, $\lambda_3 = \dfrac{170}{3}$
$L = \dfrac{95}{13}$

Tempo médio que um cliente passa no sistema:
$W = \dfrac{L}{\sum_j = 1^3 r_j} = \dfrac{19}{78}$