ME501 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

LISTA 2 – GABARITO

1. $\mathcal{X}_i = Moeda\ usada\ no\ i - \acute{e}simo\ lan\c{c}amento$

$$\mathcal{X}_i = \begin{cases} a, & se\ moeda\ \mathcal{A} \\ b, & se\ moeda\ \mathcal{B} \end{cases}$$

$$p_{a,a} = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = a \mid \mathcal{X}_{n-1} = a) = 0.6$$
$$p_{a,b} = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = b \mid \mathcal{X}_{n-1} = a) = 0.4$$
$$p_{b,a} = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = a \mid \mathcal{X}_{n-1} = b) = 0.5$$
$$p_{b,b} = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = b \mid \mathcal{X}_{n-1} = b) = 0.5$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Pi_a = 0.6\Pi_a + 0.4\Pi_b \\ \Pi_b = 0.5\Pi_a + 0.5\Pi_b \\ \Pi_a + \Pi_b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_a - \Pi_b = 0.6\Pi_a \\ \Pi_a + \Pi_b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_b = 0.8\Pi_a \\ \Pi_b = 1 - \Pi_a \end{cases} \Leftrightarrow \Pi_a = {}^{1}/_{1.8}$$

Proporção de tempo que a moeda $\mathcal{A}$ é usada = Π_a = 0.5556.

$\mathcal{Y}_j = Resultado\ do\ j - \acute{e}simo\ lan\c{c}amento$

$$\mathcal{Y}_j = \begin{cases} c, & se\ obtiver\ coroa \\ k, & se\ obtiver\ cara \end{cases}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_j = \mathcal{A}_c) = 0.6$ $\quad$ $\mathbb{P}(\mathcal{Y}_j = \mathcal{A}_k) = 0.4$

$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_j = \mathcal{B}_c) = 0.5$ $\quad$ $\mathbb{P}(\mathcal{Y}_j = \mathcal{B}_k) = 0.5$

$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_3 = \mathcal{B} | \mathcal{Y}_1 = \mathcal{A})$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k).\mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{A}_c | \mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k) + \mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c).\mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{B}_k | \mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c)$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k)}.\frac{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{A}_c , \mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k)}{\cancel{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k)}} + \cancel{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c)}.\frac{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{B}_k , \mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c)}{\cancel{\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c)}}$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{A}_c).\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_k) + \mathbb{P}(\mathcal{Y}_2 = \mathcal{B}_k).\mathbb{P}(\mathcal{Y}_1 = \mathcal{A}_c)$$

$$= 0.6 * 0.4 + 0.4 * 0.5 = 0.24 + 0.20 = 0.44$$

2. Sabemos que

$$\sum_{j} p_{ij} = 1 = \sum_{i} p_{ij}$$

Para mostrar que $\Pi_i = {}^{1}/_{\mathcal{M}}\ \forall i$ precisamos verificar se Π_i satisfaz $\begin{cases} \Pi_j = \sum_i \Pi_i p_{ij} \\ \sum_j \Pi_j = 1 \end{cases}$.

Supondo $\Pi_i = {}^{1}/_{\mathcal{M}}\ \forall i$ verdade, temos que

$$\Pi_j = \sum_{i} \Pi_i p_{ij} = \sum_{i} \frac{1}{\mathcal{M}} p_{ij} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i} p_{ij} = \frac{1}{\mathcal{M}} \times 1 = \frac{1}{\mathcal{M}}$$

Além disso,

$$\sum_{j} \Pi_j = \sum_{j} \frac{1}{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \frac{1}{\mathcal{M}} = 1$$

Logo, se a matriz de transição de uma Cadeia de Markov com $\mathcal{M}$ estados é duplamente estocástica, então $\Pi_i = {}^{1}/_{\mathcal{M}}\ \forall i$

3. Temos que

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(Ter\ j\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Tem\ i\ guarda - chuvas\ na\ origem\ e\ clima)$$

Assim.

$$p_{0,0} = \mathbb{P}(Não\ ter\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Não\ tem\ guarda - chuvas\ na\ origem) = 0$$

$$p_{0,\mathrm{k}} = \mathbb{P}(Ter\ k\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Não\ tem\ guarda - chuvas\ na\ origem) = 1$$

$$p_{0,j} = \mathbb{P}(Ter\ j\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Não\ tem\ guarda - chuvas\ na\ origem) = 0\ \forall j \neq \mathrm{k}$$

$$p_{1,\mathrm{k}} = \mathbb{P}(Ter\ k\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Tem\ \ 1\ guarda - chuva\ na\ origem\ e\ chuva) = p$$

$$p_{1,\mathrm{k}-1} = \mathbb{P}(Ter\ k - 1\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Tem\ \ 1\ guarda - chuva\ na\ origem\ e\ não - chuva) = 1 - p$$

$$p_{1,j} = \mathbb{P}(Ter\ j\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Tem\ 1\ guarda - chuva\ na\ origem) = 0\ \forall j \neq \{\mathrm{k}, \mathrm{k} - 1\}$$

$$p_{\mathrm{k},1} = \mathbb{P}(Ter\ 1\ guarda - chuva\ no\ destino\ |\ Tem\ k\ guarda - chuvas\ na\ origem\ e\ chuva) = p$$

$$p_{\mathrm{k},0} = \mathbb{P}(Não\ \ ter\ guarda - chuvas\ no\ destino\ |\ Tem\ k\ guarda - chuvas\ na\ origem\ e\ não - chuva) = p$$

Logo,

$$p_{i,\mathrm{k}-i+1} = \mathbb{P}(Ter\ k-i+1\ guarda-chuvas\ no\ destino \mid Tem\ \ i\ guarda \\ -chuva\ na\ origem\ e\ chuva) = p\ \forall i \neq 0$$

$$p_{i,\mathrm{k}-i} = \mathbb{P}(Ter\ k-i\ guarda-chuvas\ no\ destino \mid Tem\ \ i\ guarda-chuva\ na\ origem\ e\ não \\ -chuva) = 1-p\ \forall i \neq 0$$

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(Ter\ j\ guarda-chuvas\ no\ destino \mid Tem\ \ i\ guarda-chuvas\ na\ origem) \\ = 0 \qquad i = 0\ e\ j \neq \mathrm{k}\ \ ou\ \ i \neq 0\ \mathrm{e}\ j \neq \{k-i, k-i+1\}$$

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(Ter\ j\ guarda-chuvas\ no\ destino \mid Tem\ \ i\ guarda-chuvas\ na\ origem) \\ = 1 \qquad i = 0\ e\ j = \mathrm{k}$$

Temos que

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 & q & p \\ \vdots & & & & & \iddots & q & p & 0 \\ \vdots & & & & \iddots & \iddots & p & \iddots & \vdots \\ \vdots & & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ \vdots & \iddots & q & \iddots & \iddots & & & & \vdots \\ 0 & q & p & \iddots & & & & & \vdots \\ q & p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $q = 1-p$.

Assim,

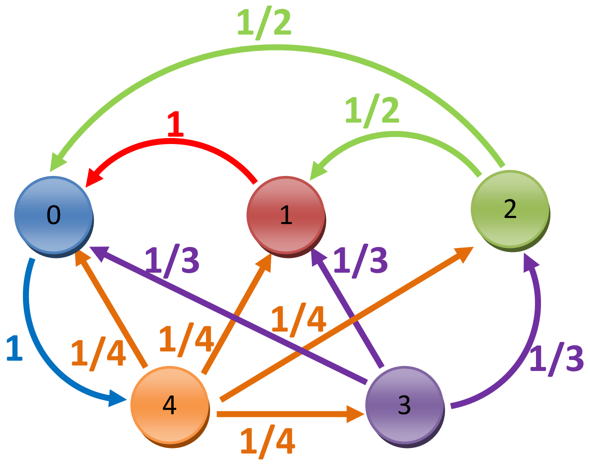
$$\begin{cases} \Pi_0 = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_\mathrm{k} \\ \Pi_1 = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_{\mathrm{k}-1} + \mathrm{p} \times \Pi_\mathrm{k} \\ \Pi_2 = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_{\mathrm{k}-2} + \mathrm{p} \times \Pi_{\mathrm{k}-1} \\ \vdots \\ \Pi_{\mathrm{k}-1} = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_1 + \mathrm{p} \times \Pi_2 \\ \Pi_\mathrm{k} = \Pi_0 + \mathrm{p} \times \Pi_1 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \cdots + \Pi_\mathrm{k} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_\mathrm{k} = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_\mathrm{k} + \mathrm{p} \times \Pi_1 \Leftrightarrow \Pi_\mathrm{k} = \Pi_1 \\ \Pi_1 = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_{\mathrm{k}-1} + \mathrm{p} \times \Pi_1 \Leftrightarrow \Pi_1 = \Pi_{\mathrm{k}-1} \\ \Pi_{\mathrm{k}-1} = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_{\mathrm{k}-1} + \mathrm{p} \times \Pi_2 \Leftrightarrow \Pi_{\mathrm{k}-1} = \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_i = \Pi_j\ \forall i,j = 1, \dots, k \\ \Pi_0 = (1-\mathrm{p}) \times \Pi_i \\ (1-\mathrm{p}) \times \Pi_i + \mathrm{k} \times \Pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_i = \dfrac{1}{\mathrm{k}+1-\mathrm{p}}, \forall i = 1, \dots, k \\ \Pi_0 = \dfrac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{k}+1-\mathrm{p}} \end{cases}$$

Como $\begin{cases} \Pi_j = \sum_i \Pi_i p_{ij} \\ \sum_j \Pi_j = 1 \end{cases}$ é satisfeito, temos que a Distribuição Estacionária da Cadeia de Markov é $\Pi_0 = \frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{k}+1-\mathrm{p}}$, $\Pi_i = \frac{1}{\mathrm{k}+1-\mathrm{p}}, i = 1, \dots, k$.

A proporção de tempo que Pedro fica molhado é $\Pi_0 \times \mathbb{P}(\mathrm{chuva}) = \frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{k}+1-\mathrm{p}} \times \mathrm{p}$.

4. Seja



$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Pi_0 = \Pi_1 + {}^1\!/_2\,\Pi_2 + {}^1\!/_3\,\Pi_3 + {}^1\!/_4\,\Pi_4 \\ \Pi_1 = {}^1\!/_2\,\Pi_2 + {}^1\!/_3\,\Pi_3 + {}^1\!/_4\,\Pi_4 \\ \Pi_2 = {}^1\!/_3\,\Pi_3 + {}^1\!/_4\,\Pi_4 \\ \Pi_3 = {}^1\!/_4\,\Pi_4 \\ \Pi_4 = \Pi_0 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_4 = \Pi_0 \\ \Pi_3 = {}^1\!/_4\,\Pi_0 \\ \Pi_2 = {}^1\!/_3 \times {}^1\!/_4\,\Pi_0 + {}^1\!/_4\,\Pi_0 = {}^1\!/_3\,\Pi_0 \\ \Pi_1 = {}^1\!/_2 \times {}^1\!/_3\,\Pi_0 + {}^1\!/_3 \times {}^1\!/_4\,\Pi_0 + {}^1\!/_4\,\Pi_0 = {}^1\!/_2\,\Pi_0 \\ \Pi_0 = {}^1\!/_2\,\Pi_0 + {}^1\!/_2 \times {}^1\!/_3\,\Pi_0 + {}^1\!/_3 \times {}^1\!/_4\,\Pi_0 + {}^1\!/_4\,\Pi_0 = \Pi_0 \\ \Pi_0 + {}^1\!/_2\,\Pi_0 + {}^1\!/_3\,\Pi_0 + {}^1\!/_4\,\Pi_0 + \Pi_0 = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\Pi_0 = {}^{12}\!/_{37} \qquad \Pi_1 = {}^{6}\!/_{37} \qquad \Pi_2 = {}^{4}\!/_{37}$$

$$\Pi_3 = {}^{3}\!/_{37} \qquad \Pi_4 = {}^{12}\!/_{37}$$

5. Temos que $\Pi_i = \sum_j \Pi_j \mathcal{p}_{ij}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi\mathcal{P} \mid \times \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ \Pi &= \Pi\mathcal{P} = \Pi\mathcal{P}^2 \mid \times \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ \Pi &= \Pi\mathcal{P} = \Pi\mathcal{P}^2 = \Pi\mathcal{P}^3 \mid \times \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ &\vdots \\ \Pi &= \Pi\mathcal{P} = \Pi\mathcal{P}^2 = \cdots = \Pi\mathcal{P}^k \end{aligned}$$

Assim,

$$\Pi_i = \sum_j \Pi_j {\mathcal{p}_{ij}}^k$$

Logo, a distribuição estacionária da Cadeia de Markov com probabilidade de transição $\mathcal{p}_{ij}$ é também a distribuição estacionária da Cadeia de Markov com probabilidade de transição $q_{ij} = {\mathcal{p}_{ij}}^k$.

6. **a)** Se, a longo prazo, $n \times \Pi_i$ é o tempo que a Cadeia de Markov passa no estado i, $n \times \Pi_i$ também é (a longo prazo) o número de vezes ao longo do tempo que a Cadeia de Markov "chega" (entra) no estado i (podendo diferenciar em uma entrada para menos se o processo começa no estado i) e o número de vezes ao longo do tempo que a Cadeia de Markov "sai" do estado i (podendo diferenciar em uma entrada para mais se não contarmos a saída no instante n para o instante $n+1$, se $X_n = i$). Como $n \to +\infty$, temos Π_i como a proporção para as três situações.

b) $\Pi_i p_{ij}$ é a proporção de vezes que a Cadeia de Markov "sai" do estado i e vai para um estado j específico, pois, por **a**, Π_i é a proporção de transições ao longo do tempo que a Cadeia de Markov "sai" do estado i para algum estado k qualquer, e por definição, p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para um estado j específico. Assim, $\Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições do estado i para o estado j (j específico).

c) $\sum_i \Pi_i p_{ij}$ é a soma das proporções de vezes que a Cadeia de Markov sai de cada estado i para algum estado j específico, ou seja, a proporção de vezes que a Cadeia de Markov sai de todos os estados i para algum estado j específico, pois, por **b**, $\Pi_i \times p_{ij}$ é a proporção de transições do estado i para o estado j (j específico), e assim, $\sum_i \Pi_i p_{ij}$ é a soma das proporções de transição de cada estado i para o estado j (j específico). Logo, $\sum_i \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados i para o estado j (j específico).

d) Como, por **c**, $\sum_i \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados i para o estado j (j específico), e, por **a**, Π_j é a proporção de vezes que a Cadeia de Markov "chega" (entra) no estado j (proporção de transições de todos os estados k para o estado j), temos que $\Pi_j = \sum_i \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados i para algum estado j específico.

e) Sabemos que

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^C} \Pi_i p_{ij} = \sum_{j \in A^C} \sum_{i \in A} \Pi_i p_{ij}$$

Assim, temos $\sum_{i \in A} \Pi_i p_{ij}$ a proporção de transições de todos os estados $i \in A$ para algum estado $j \in A^C$ específico. Por outro lado, $\sum_{j \in A^C} \sum_{i \in A} \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados $i \in A$ para todos os estados $j \in A^C$.

Além disso,

$$\sum_{i \in A^C} \sum_{j \in A} \Pi_i p_{ij} = \sum_{j \in A} \sum_{i \in A^C} \Pi_i p_{ij}$$

De forma semelhante, $\sum_{i \in A^C} \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados $i \in A^C$ para algum estado $j \in A$ específico. Por outro lado, $\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^C} \Pi_i p_{ij}$ é a proporção de transições de todos os estados $i \in A^C$ para todos os estados $j \in A$.

Como $n \to \infty$, a proporção de vezes que a Cadeia de Markov passa de um estado $x \in A$ para um estado $y \in A^C$ (está em A e vai para A^C) é igual à proporção de vezes que a Cadeia de Markov passa de um estado $x \in A^C$ para um estado $y \in A$ (está em A^C e vai para A).

7. Condicionando no resultado da primeira partida e observando que esta contribui com +1 para o número total de partidas, obtemos:

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_0) = 0 \qquad\qquad \mathbb{E}(\mathcal{M}_N) = 0$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = \mathrm{p} \times (\mathbb{E}(\mathcal{M}_{i+1}) + 1) + (1-\mathrm{p}) \times (\mathbb{E}(\mathcal{M}_{i-1}) + 1) = \mathrm{p} \times \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i+1}) + (1-\mathrm{p}) \times \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i-1}) + 1 = m_i$$

Para p = $^1/_2$ temos que

$$2 \times \mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i+1}) + \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i-1}) + 2$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(\mathcal{M}_{i+1}) + \mathbb{E}(\mathcal{M}_i)}_{\alpha_{i+1}} = \underbrace{\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) - \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i-1})}_{\alpha_i} - 2$$

Assim,

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - 2$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 - 2 = (m_1 - 0) - 2 = m_1 - 2\\
\alpha_3 &= \alpha_2 - 2 = (m_1 - 2) - 2 = m_1 - 4\\
\alpha_4 &= \alpha_3 - 2 = (m_1 - 4) - 2 = m_1 - 6\\
&\vdots\\
\alpha_{i+1} &= \alpha_i - 2 = m_1 - 2i \ \forall i = \{1,2, \ldots N-1\}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k = \sum_{k=1}^{i} (m_1 - 2k) = i \times m_1 - 2\sum_{k=1}^{i} k = i \times m_1 - 2 \times \frac{i \times (i+1)}{2}$$
$$= i \times m_1 - i \times (i+1)$$

Assim,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_N) = N \times m_1 - N \times (N+1) = 0 \Rightarrow N \times m_1 = N \times (N+1) \Rightarrow m_1 = N+1$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = i \times (N + 1 - i - 1) = i \times (N - i), se\ p = {}^1/_2$$

Para p ≠ $^1/_2$, basta verificar se

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = \frac{i}{1-2\mathrm{p}} - \frac{N}{1-2\mathrm{p}} \frac{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^N}$$

satisfaz

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = \mathrm{p} \times \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i+1}) + (1-\mathrm{p}) \times \mathbb{E}(\mathcal{M}_{i-1}) + 1$$

Ou seja,

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_i) = 1 + \mathrm{p} \times \left[\frac{i+1}{1-2\mathrm{p}} - \frac{N}{1-2\mathrm{p}} \frac{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^N}\right] + (1-\mathrm{p}) \times \left[\frac{i-1}{1-2\mathrm{p}} - \frac{N}{1-2\mathrm{p}} \frac{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i-1}}{1 - \left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^N}\right]$$

8. Temos que

$$\mathbb{P}(ganhar \mid \mathcal{X}_0 = i, chega\ a\ \mathcal{N}) = \frac{\mathbb{P}(ganhar, \mathcal{X}_0 = i, chega\ a\ \mathcal{N})}{\mathbb{P}(\mathcal{X}_0 = i, chega\ a\ \mathcal{N})} = \frac{\wp_{i+1}}{\wp_i} \times \mathrm{p}$$

Se p = $^1/_2$, temos que $\wp_i = {}^{i}/_{\mathcal{N}}$. Assim,

$$\mathbb{P}(ganhar \mid \mathcal{X}_0 = i, chega\ a\ \mathcal{N}) = \frac{\frac{i+1}{\mathcal{N}}}{\frac{i}{\mathcal{N}}} \times \frac{1}{2} = \frac{i+1}{2i}$$

Se p $\neq$ $^1/_2$, temos que $\wp_i = \frac{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^i}{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{\mathcal{N}}}$. Assim,

$$\mathbb{P}(ganhar \mid \mathcal{X}_0 = i, chega\ a\ \mathcal{N}) = \frac{\frac{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i+1}}{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{\mathcal{N}}}}{\frac{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i}}{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{\mathcal{N}}}} \times \mathrm{p} = \frac{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i+1}}{1-\left(\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}\right)^{i}} \times \mathrm{p}$$

9. **a)** Temos que

$$\mu = 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\pi_0 = \pi_0^0 \times \frac{1}{4} + \pi_0^2 \times \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\pi_0^2 - 4\pi_0 + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$\pi_0 = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \pi_0^{'} = 1/3 \\ \pi_0^{''} = 1 \end{cases}$$

Logo, $\pi_0 = \min(\pi_0^{'}, \pi_0^{''}) = 1/3$.

b) Temos que

$$\mu = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\pi_0 = \pi_0^0 \times \frac{1}{6} + \pi_0^1 \times \frac{1}{2} + \pi_0^3 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6\pi_0 = 1 + 3\pi_0 + 2\pi_0^3 \Leftrightarrow \underline{2\pi_0^3 - 3\pi_0 + 1 = 0} \Leftrightarrow \pi_0(3 - 2\pi_0^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\pi_0^{'}} = 1 \Leftrightarrow \left(\pi_0 - \underbrace{1}\right)\left(\boxed{\mathrm{a}\pi_0^2 + \mathrm{b}\pi_0 + \mathrm{c}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\mathrm{a}\pi_0^3 + \mathrm{b}\pi_0^2 + \mathrm{c}\pi_0 - \mathrm{a}\pi_0^2 - \mathrm{b}\pi_0 - \mathrm{c} = 0} \Leftrightarrow \mathrm{a} = 2 \quad \mathrm{c} = -1 \quad \begin{cases} \mathrm{b} - \mathrm{a} = 0 \\ \mathrm{c} - \mathrm{b} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a} = 2 \\ \mathrm{b} = 2 \\ \mathrm{c} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\pi_0^2 + 2\pi_0 - 1} = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\pi_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \begin{cases} \pi_0^{''} = \frac{-2 + \sqrt{12}}{4} \\ \pi_0^{'''} = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4} < 0 \end{cases}$$

Logo, $\pi_0 = \min(\pi_0^{'}, \pi_0^{''}) = 0.366025$.

10. Temos que.

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_i) = \mu^n$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathcal{X}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n = \frac{1}{1-\mu}$$

11. Queremos verificar se

$$\pi_j \overset{?}{=} \sum_i \pi_i Q_{ij}$$

Por definição

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(\mathcal{X}_m = j | \mathcal{X}_{m-1} = i) = \cdots = \frac{p_{ji}\pi_j}{\pi_i}$$

Assim

$$\sum_i \pi_i Q_{ij} = \sum_i \cancel{\pi_i} \frac{p_{ji}\pi_j}{\cancel{\pi_i}} = \sum_i p_{ji}\pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_i p_{ji}}_{1} = \pi_j$$

12. **a)** $\mathcal{X}_n = \textit{Número de bolinhas brancas na Urna } 1 \textit{ após } n \textit{ trocas}$

$p_{i,j} = \mathbb{P}(\textit{Ter } j \textit{ bolinhas brancas após } n \textit{ trocas } | \textit{Tinha } i \textit{ bolinhas brancas após } n-1 \textit{ trocas})$

Assim.

$$p_{i,i} = \mathbb{P}(\textit{Ter } i \textit{ bolinhas brancas } | \textit{ Tinha } i \textit{ bolinhas brancas})$$

$$= \underbrace{\frac{i}{m} \times \frac{m-i}{m}}_{\substack{\#\, bolin\, has\, brancas \quad urna\, 1 \\ \times \\ \#\, bolin\, has\, brancas \quad urna\, 2}} + \underbrace{\frac{m-i}{m} \times \frac{i}{m}}_{\substack{\#\, bolin\, has\, coloridas \quad urna\, 1 \\ \times \\ \#\, bolin\, has\, coloridas \quad urna\, 2}} \quad \forall i$$

$$p_{i,i+1} = \mathbb{P}(\textit{Ter } i+1 \textit{ bolinhas brancas } | \textit{ Tinha } i \textit{ bolinhas brancas}) = \underbrace{\frac{m-i}{m} \times \frac{m-i}{m}}_{\substack{\#\, bolin\, has\, coloridas \quad urna\, 1 \\ \times \\ \#\, bolin\, has\, brancas \quad urna\, 2}} \quad \forall i$$

$$p_{i,i-1} = \mathbb{P}(\textit{Ter } i-1 \textit{ bolinhas brancas } | \textit{ Tinha } i \textit{ bolinhas brancas}) = \underbrace{\frac{i}{m} \times \frac{i}{m}}_{\substack{\#\, bolin\, has\, brancas \quad urna\, 1 \\ \times \\ \#\, bolin\, has\, coloridas \quad urna\, 2}} \quad \forall i$$

b) A Distribuição Estacionária deve ser hipergeométrica, pois estamos interessados no número de bolas brancas na Urna 1 (com m bolinhas) após n trocas aleatórias entre as duas Urnas, cada uma com m bolinhas, totalizando $2m$ bolinhas entre as duas urnas (m brancas e m coloridas). Assim,

$$\mathbb{P}(\mathcal{X}_n = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{2m-m}{m-i}}{\binom{2m}{m}} = \frac{\binom{m}{i}\binom{m}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$

c) Para garantirmos que a Cadeia de Markov é reversível, é preciso que

$$\mathrm{Q}_{ij} = p_{ij} \Leftrightarrow \pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}\ \forall j$$

Sejam,

$$\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{p_{i,i+1}}{p_{i+1,i}} = \frac{(m-i)^2/m^2}{(i+1)^2/m^2} \qquad \frac{\pi_i}{\pi_{i+1}} = \frac{p_{i+1,i}}{p_{i,i+1}} = \frac{(i-1)^2/m^2}{(m+i)^2/m^2}$$

Assim,

$$\mathrm{Q}_{i,i+1} = \frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} p_{i+1,i} = \frac{(m-i)^2/m^2}{(i+1)^2/m^2} \times \frac{(i+1)^2}{m^2} = \frac{(m-i)^2}{m^2} = p_{i,i+1}$$

e

$$\mathrm{Q}_{i+1,i} = \frac{\pi_i}{\pi_{i+1}} p_{i,i+1} = \frac{(i+1)^2/m^2}{(m-i)^2/m^2} \times \frac{(m-i)^2}{m^2} = \frac{(i+1)^2}{m^2} = p_{i+1,i}$$

Logo,

$$\pi_i p_{i,i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1,i} \Leftrightarrow \pi_i \frac{(m-i)^2}{m^2} = \pi_{i+1} \frac{(i+1)^2}{m^2} \Leftrightarrow \boxed{\pi_{i+1} = \frac{(m-i)^2}{(i+1)^2} \pi_i}$$

Assim, para $m = 2$ temos

$$\begin{cases} \pi_1 = 4 \times \pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{1}{4} \times \pi_1 = \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = 1/6 \\ \pi_1 = 4/6 \\ \pi_2 = 1/6 \end{cases}$$

Verificando a suposição de a Distribuição Estacionária ter distribuição Hipergeométrica, temos:

$$\pi_0 = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{\frac{2!}{0!\,(2-0)!} \times \frac{2!}{2!\,(2-2)!}}{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}} = \frac{1 \times 1}{\frac{4 \times 3}{2}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\pi_1 = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{\frac{2!}{1!\,(2-1)!} \times \frac{2!}{1!\,(2-1)!}}{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}} = \frac{2 \times 2}{\frac{4 \times 3}{2}} = \frac{4 \times 2}{12} = \frac{4}{6}$$

$$\pi_2 = \mathbb{P}(\mathcal{X}_n = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{\frac{2!}{2!\,(2-2)!} \times \frac{2!}{0!\,(2-0)!}}{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}} = \frac{1 \times 1}{\frac{4 \times 3}{2}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Assim, a suposição de que a distribuição é Hipergeométrica feita em **b** é verdadeira, pois o resultado obtido para $m = 2$ pode ser estendido para qualquer m.