ME-310 Probabilidade II

Lista 1

1. Seja $F(a,b)$ a função da distribuição acumulada conjunta de v.a. X e Y. Sabendo F, calcule $\mathbf{P}(X > a, Y > b)$ e $\mathbf{P}(a_1 < X < a_2, Y \geq b)$.

2. A distribuição conjunta de X e Y é dada por $p(x,y)$, onde

$$\begin{array}{lll} p(1,1) = 1/9, & p(2,1) = 1/3, & p(3,1) = 1/9 \\ p(1,2) = 1/9, & p(2,2) = 0, & p(3,2) = 1/18 \\ p(1,3) = 0, & p(2,3) = 1/6, & p(3,3) = 1/9. \end{array}$$

(a) Calcule as distribuições marginais de X e Y.
(b) As v.a. X e Y são independentes?
(c) Calcule a distribuição condicional de X dado que $Y = 1$.

3. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+2y), & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se X e Y são independentes. Calcule:
(a) o valor de c;
(b) a densidade de X;
(c) $\mathbf{P}(X < Y)$;
(d) $\mathbf{P}(X + Y < 1)$.

4. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} cxe^{-(x+y)}, & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de c.
(b) Calcule a densidade condicional de Y dado que $X = x$.
(c) Verifique se X e Y são independentes.

5. Sejam X e Y v.a. independentes, $X \sim U(0;2)$ e $Y \sim U(-1;3)$. Calcule a densidade de $X + Y$.

6. Sejam X e Y v.a. independentes, $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim \exp(\lambda)$. Calcule a densidade de X/Y.

7. Sejam X_1, X_2, X_3 v.a. i.i.d. exponenciais com parâmetro $\lambda = 1$. Calcule:
(a) $\mathbf{P}(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq a)$;
(b) $\mathbf{P}(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq a)$;
(c) densidade de $Z = \min\{X_1, X_2, X_3\}$.

8. O número dos clientes que entram numa loja durante uma hora tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 12$. Cada cliente compra alguma coisa com probabilidade 1/4 e não compra nada com probabilidade 3/4 independentemente dos outros. Se entre 12:00 e 13:00 entraram exatamente 10 clientes, qual é a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa? Se entre 13:00 e 14:00 exatamente 8 clientes não compraram nada, qual é a probabilidade que pelo menos 2 compraram alguma coisa?

9. Um casal combina a se encontrar por volta de 12:30. O homem chega num momento distribuído uniformemente entre 12:15 e 12:45, a mulher chega num momento distribuído uniformemente entre 12:00 e 13:00. Qual é a probabilidade de que primeiro a chegar terá de esperar mais de 15 minutos? Qual é a probabilidade de que o homem vai chegar primeiro?

10. A densidade conjunta das v.a. X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a densidade condicional de X dado que $Y = y$.

11. Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes, X_i tem distribuição de Poisson com parâmetro λ_i, $i = 1, 2$. Seja $Z = X_1 + X_2$. Calcule a distribuição condicional de X_1 dado que $Z = n$.

12. A distrbuição conjunta de X, Y e Z é dada por

$$p(1,2,3) = p(2,1,1) = p(2,2,1) = p(2,3,2) = 1/4.$$

Calcule $\mathbb{E}(XYZ)$ e $\mathbb{E}(XY + XZ + YZ)$.

13. Sejam X, Y e Z v.a. i.i.d. que assumem valores 1 e 2 com prob. 1/2. Ache a distribuição de XYZ e $X^2 + YZ$.

14. Sejam $X \sim$Poisson(λ) e $Y \sim U(0,1)$, independentes. Ache a distribuição de $X + Y$.

15. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y-x), & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ache o valor de c e as distribuições marginais de X e Y. As v.a. X e Y são independentes?

16. Um dado honesto é lançado 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter duas vezes “6”, cinco vezes “ 5” e três vezes “ 1”?