

COMO NO VESTIBULAR, LEIA AS QUESTÕES, PENSE, NELAS ESTÁ A RESPOSTA.
PARTICIPE SEGUNDA DA AVALIAÇÃO DE CURSO E GANHE UM PONTO.

Segunda Provinha de ma211ab, ps2015

RA: _ _ _ _ _

nome completo, turma:

assinatura, rg , cpf , níver e e-mail preferido:

(1) (4,0 pontos) Os indígenas do grupo Baníua, ao que parecem já usam o mathematica para problemas de otimização. Num computador, encontrado na região do Alto Rio Negro, entre Colômbia e Venezuela, com muita digitação no idioma Barauaque, foi encontrado um estudo sobre que distância uma flecha deveria percorrer em linha reta para atingir o ponto mais longínquo e o ponto mais próximo de uma lagoa, sendo a flecha lançada de um ponto de partida fixo. Para tanto as seguintes linhas de comando estavam digitadas.

```
h[x_, y_] = (x/5)^2 + (y/4)^2;  
a = RegionPlot[h[x, y] ≤ 1, {x, -7, 7}, {y, -6, 6}];  
b = Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[{4, 5}]}];  
g[x_, y_] = (x - 4)^2 + (y - 5)^2;  
c = ContourPlot[Sqrt[g[x, y]], {x, -7, 7}, {y, -6, 6}, ContourShading → False,  
ContourLabels → True, Contours → 20]  
Show[a, b, c]
```

(a) descreva a lagoa, diga qual o ponto de partida, faça o desenho obtido após a quinta linha de comando e explique por que motivo o indígena define uma $g[x, y]$ e depois a utiliza dentro de uma raiz quadrada no outro comando ... qual o significado desta g ? ... qual a utilidade da h , definida de início?

Em seguida o silvícola clicou com o mouse sobre o desenho, clicou de novo outro botão no mouse, mexeu com ele e digitou mais duas linhas de comando, que aqui colocamos com as respostas.

```
Sqrt[g[3, 3.2]]  
2.05913  
Sqrt[g[-4, -2.3]]  
10.8301
```

(b) diga que manobras nosso indígena fez com o mouse e por qual motivo, explique o significado das entradas e saídas numéricas que aparecem nas quatro linhas acima, interprete-as geomètricamente face ao desenho que fez no item anterior e ao problema em questão.

Bom, desconfiado da precisão dos resultados, o bravo guerreiro digitou as linhas abaixo e tal sugere que o grande Joseph Louis, que foi até senador de Napoleão, visitou mesmo o norte do Amazonas no final do século dezoito e ensinou aos ancestrais dos Baníuas como utilizar seus

famosos multiplicadores.

$$\begin{aligned} \text{gradg}[x_-, y_-] &= \{D[g[x, y], x], D[g[x, y], y]\}; \\ \text{gradh}[x_-, y_-] &= \{D[h[x, y], x], D[h[x, y], y]\}; \\ \{\text{gradg}[x, y] == \lambda \text{gradh}[x, y], h[x, y] == 1\} \end{aligned}$$

- (c) estas três linhas foram digitadas para montar um sistema de três equações para as incógnitas x , y e λ , o resultado da execução da terceira linha é o tal conjunto de três equações que seriam resolvidas no comando seguinte ...escreva as três equações, interprete o seu significado e diga qual seria a utilidade de resolvê-las.

Apesar da simplicidade do problema, estas equações não são simples de resolver não, ainda bem que os indígenas já usam computadores, vejamos a solução numérica.

```
NSolve[%, {x, y, λ}]
{{x → -4.03116, y → -2.36639, λ → 49.8067},
 {x → 11.6477 - 11.0981i, y → -9.31816 - 8.87852i, λ → 20.5 - 4.28769i},
 {x → 11.6477 + 11.0981i, y → -9.31816 + 8.87852i, λ → 20.5 - 4.28769i},
 {x → 2.95799, y → 3.22493, λ → -8.80673}}
Sqrt[g[2.95799, 3.22493]]
2.05831
Sqrt[g[-4; 03116, -2.36639]]
10.8979
```

- (d) explique o significado dos resultados obtidos, por que motivo aparece aquele % e que comando é este, Sqrt[], para que serve. Justifique, pelo problema que se resolve, o porquê de aparecerem apenas duas soluções reais.

Bom, afastado o medo da imprecisão, nosso incansável selvagem resolve, neste ponto, preparar uma animação para mostrar no datashow da tribo, digitou mais algumas linhas.

```
α[t_] = {5 Cos[t], 4 Sin[t]};
d = ParametricPlot[α[t], {t, 0, 2π}];
Manipulate[Show[b, c, d, Graphics[Line[{{4, 5}, α[t]}]], Graphics[{PointSize[Large],
Red, Point[α[t]}]], {t, 0, 2π}]
```

- (e) explique como funcionará esta animação, que tem um botão para fazer variar o parâmetro t e também pode fazê-lo variar automaticamente entre 0 e 2π .

Olhando a animação nosso protagonista teve uma idéia, notou que o máximo e o mínimo da distância teriam é que ocorrer mesmo na fronteira da lagoa (explique) ... e que o problema poderia ter sido resolvido até sem os multiplicadores, como um problema de cálculo I ... e desenhou um gráfico.

$$\begin{aligned} \text{dist}[t_] &= g[5 \text{Cos}[t], 4 \text{Sin}[t]]; \\ \text{Plot}[\{\text{dist}[t], 0\}, \{t, 0, 2\pi\}] \end{aligned}$$

- (f) o uso do termo 'dist', para denominar a função, sugere que o Baníua sabia mais algum idioma além do Baruaque, concorda? ... levando em conta o problema que está sendo resolvido você seria capaz de fazer um esboço provável do tal gráfico?

Em seguida o nobre selvagem resolveu o problema como se fosse de cálculo I, ao que parece ajudando o mathematica, algo belo . . . o indígena preocupando-se em ajudar a máquina. Notamos isto pelo procedimento dele, re-escrevendo as equações de forma que o programa não teria que lidar com funções trigonométricas inversas . . . note tal intenção pelas trocas do cosseno e do seno por u e v nas linhas mais abaixo. Note que a primeira linha é só para gerar a equação, que nas seguintes será resolvida.

```

D[g[5 Cos[t] , 4 Sin[t]] , t] == 0
-10(-4 + 5Cos[t])Sin[t] + 8Cos[t](-5 + 4Sin[t]) == 0
% /. {Cos[t] -> u , Sin[t] -> v}
-10(-4 + 5u)v + 8u(-5 + 4v) == 0
NSolve[{% , u^2 + v^2 == 1} , {u, v}]
{{u -> 2.32954 + 2.21963i, v -> -2.32954 + 2.21963i},
{u -> 2.32954 - 2.21963i, v -> -2.32954 - 2.21963i},
{u -> -0.806233, v -> -0.591598},
{u -> 0.591598, v -> 0.806233}}
Sqrt[g[5(0.59159), 4(0.80623)]]
2.05834
Sqrt[g[5(-0.80623), 4(-0.59159)]]
10.8978

```

- (g) explique o motivo e o significado dos comandos e respostas acima, inclusive aquele estranha equação adicional, $u^2 + v^2 == 1$. . . e como foi empregada a estratégia para ajudar a máquina, evitando trigonométricas inversas.

...

(2) (4,0 pontos) Um estudante estava fazendo, com uso de um computador, uma verificação da validade do teorema de Gauss numa região espacial R através de um caso particular. Foram encontradas as seguintes linhas de comando.

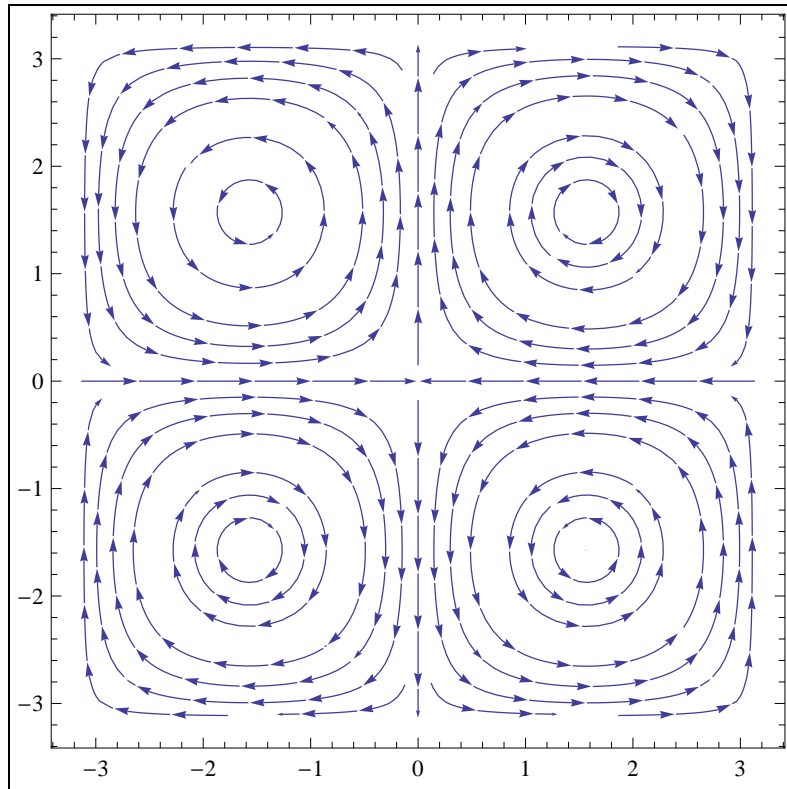
```
w[x-, y-, z-] = {x, y, 1 + z^2};
divw[x-, y-, z-] = 2 + 2z;
Integrate[divw[x, y, z], {z, 0, 4 - x^2 - y^2}]
24 - 10x^2 + x^4 - 10y^2 + 2x^2y^2 + y^4
Factor[%]
(-6 + x^2 + y^2)(-4 + x^2 + y^2)
% /.(x^2 + y^2) -> r^2;
Integrate[% * r, {r, 0, 2}]
56/3
Integrate[% , {theta, 0, 2pi}]
112pi/3
```

- (a) enuncie o teorema da divergência de Gauss,
- (b) este primeiro conjunto, ao que parece é para calcular a integral tripla, a terceira linha de comando mostra qual a região espacial R na qual o estudante fazia a verificação do teorema, defina a região, explique as linhas de comando acima,
- (c) a superfície externa à região é dividida em duas partes, uma espécie de tampa de cima e uma espécie de tampa de baixo, $\partial R = S = S_1 \cup S_2$, diga quais estes dois pedaços de superfície são, descreva-os, diga como devem ser orientados para o cálculo do fluxo ao qual faz referência do teorema de Gauss.

Nas próximas linhas o estudante parametriza e calcula o fluxo do campo vetorial w na tampa de baixo da superfície externa.

```
alpha2[r-, theta-] = {rCos[theta], rSin[theta], 0}
{rCos[theta], rSin[theta], 0}
vmer2 = D[alpha2[r, theta], r]
{Cos[theta], Sin[theta], 0}
vpar2 = D[alpha2[r, theta], theta]
{-rSin[theta], rCos[theta], 0}
ds2[r-, theta-] = Simplify[Cross[vmer2, vpar2]]
{0, 0, r}
Simplify[w[rCos[theta], rSin[theta], 0] • ds2[r, theta]]
r
Integrate[% , {r, 0, 2}]
2
Integrate[% , {theta, 0, 2pi}]
4pi
```

- (d) o fluxo calculado na tampa de baixo está entrando e coincidiu, como era de se esperar, com a área da tampa de baixo, explique e justifique esta afirmação, face aos valores que o campo w assume ao longo da tampa de baixo,
- (e) explique as linhas de comando que definem $vmer2$, $vpar2$ e $ds2$ a partir da parametrização $\alpha2$ da tampa de baixo, diga para quê e por qual motivo foram definidas estas quantidades vetoriais e qual é o seu significado,
- (f) a tampa de cima tem parametrização muito semelhante à da tampa de baixo, encontre tal parametrização . . . e repita os passos acima, escrevendo os comandos e resultados que levam ao fluxo na tampa de cima, verifique então o teorema de Gauss,
- (g) escreva, com o uso do `ParametricPlot3D[]`, o comando que produziria a superfície externa S e o resultado de sua execução.



(3) (2,0 pontos) Nesta questão responda aos itens.

- (a)** Uma das integrais de linha que empregamos é aquela que serve para calcular o trabalho que um campo de forças $w[x, y] = P[x, y]i + Q[x, y]j$ exerce sobre uma partícula movimentando-se segundo $\alpha[t] = x[t]i + y[t]j$ no domínio do campo e sofrendo sua ação . . . defina-a e explique o seu significado.
- (b)** Fale em geral sobre campos conservativos e potenciais.
- (c)** Diga se o campo acima é conservativo ou não e explique sua resposta.
- (d)** Caso alguém dissesse que o campo acima tem rotacional zero, você mudaria sua resposta ao item anterior?

...