Livro1: Exemplos de Funções Vetoriais de Várias Variáveis. Campos e Parametrizações

Em Física, Engenharia e Matemática, empregamos objetos geométricos como curvas, superfícies e regiões para modelar estruturas ou movimentos que ocorrem no espaço concreto de nossa percepção. Também associamos valores numéricos e vetores a pontos desses objetos. Veremos através dos exemplos desse capítulo que uma única ferramenta matemática nos permite descrever todos esses objetos e associações. Tal ferramenta é a função vetorial de várias variáveis.

Nesse curso pretendemos estudar o cálculo para as funções do tipo $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i.e., funções vetoriais de várias variáveis. Que associam n variáveis, ou $P = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in D_f$ (o domínio de f, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$) à êmupla de valores assumidos $f(P) = (y_1, y_2 \ldots y_m) \in \mathbb{R}^m$ (contradomínio de f). Os teoremas e resultados de tal Cálculo terão consequências para a análise dos objetos e associações descritos.

Exemplo1. Curvas Parametrizadas.

Consideremos uma mosca que vôa, descrevendo uma curva no ambiente da sala. A cada instante ela ocupa um ponto de tal ambiente. A medida que o tempo passa a sucessão de pontos gera a curva.

Vamos adaptar um modelo matemático a tal situação. Começamos por fixar num canto da sala os eixos x, y e z. Assim cada ponto do ambiente da sala passa a ser rotulado por três números. E é identificado com a tripla formada por suas coordenadas, $P = (x, y, z)$. Dessa forma o tal ambiente da sala passa a ser visto como um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ (que é o conjunto de todas possíveis triplas de números reais). Quanto ao tempo, empregamos um relógio para associar cada instante a um número real $t \in \mathbb{R}^1$.

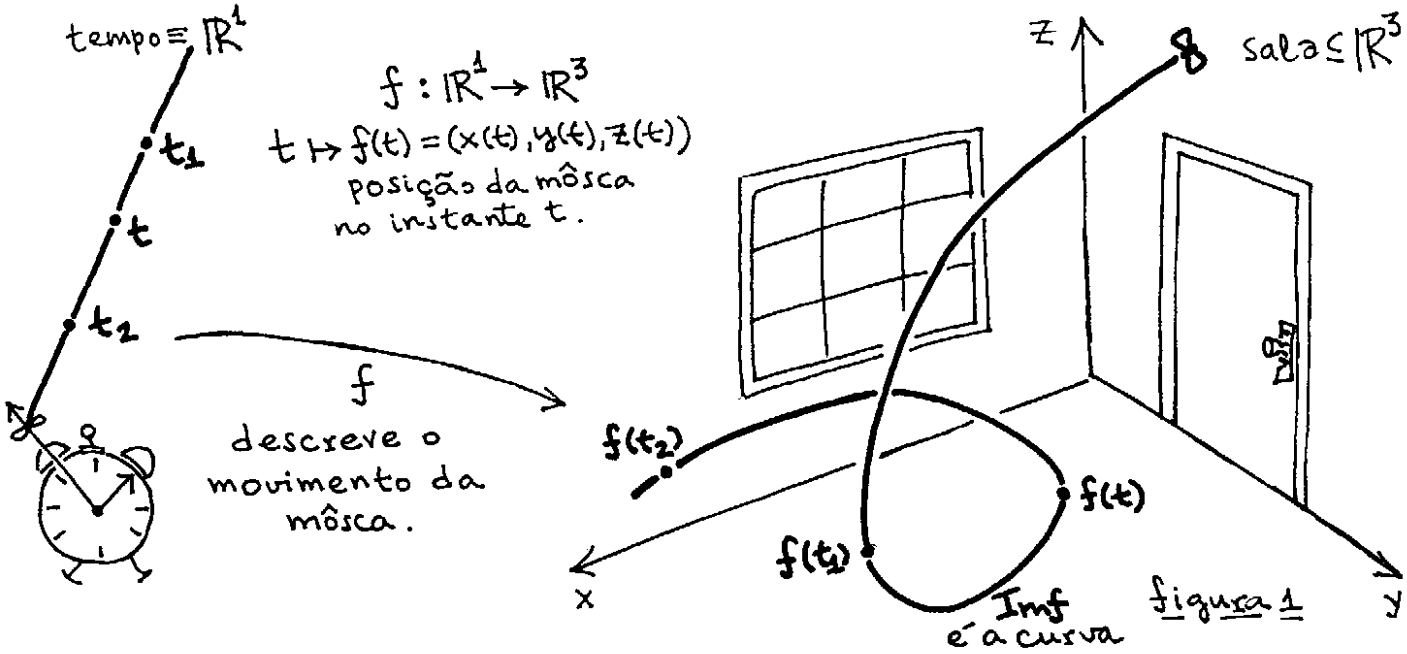


figura 1

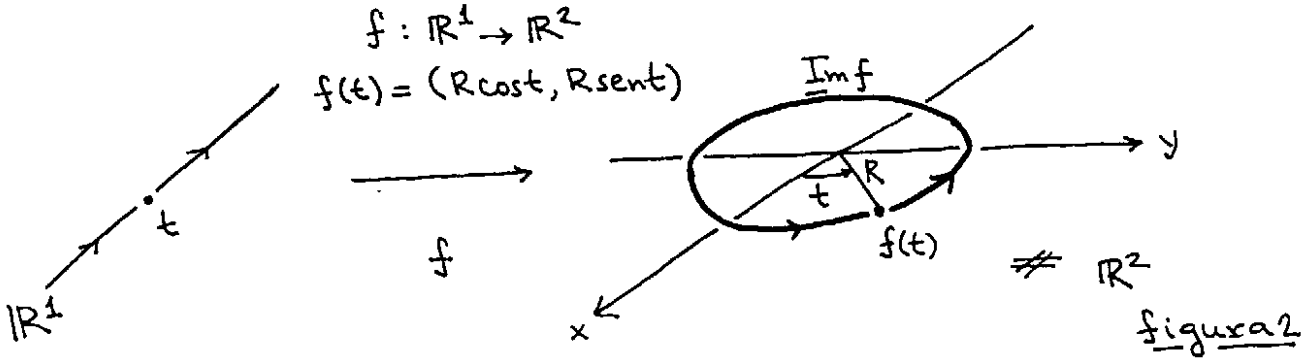
Nesse contexto o movimento da mosca pode ser descrito por, ou identificado com, uma função $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$. Que associa cada instante $t \in \mathbb{R}^1$ à posição $f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in$ sala $\subseteq \mathbb{R}^3$, ocupada pela mosca naquele instante.

Analogamente empregamos aplicações do tipo $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n, t \mapsto f(t) = (x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t))$ para descrever curvas no $\mathbb{R}^n$. O parâmetro t não precisa ser necessariamente o tempo. Pode ser interpretado como uma coordenada ao longo da curva. Cujo valor t especifica um único ponto $f(t)$ da mesma.

As coordenadas $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ do ponto imagem $f(t)$ podem ser pensadas como funções reais de uma variável $x_j : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, t \mapsto x_j(t)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Tais funções reais são chamadas de funções componentes da função vetorial f.

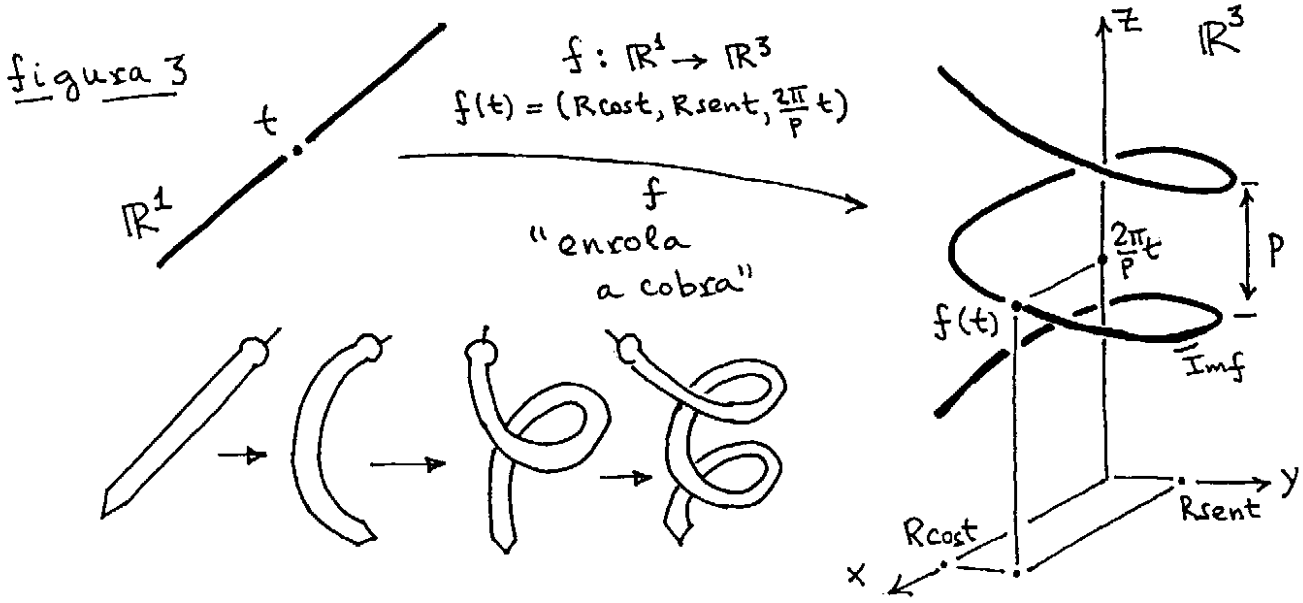
Consideremos por exemplo a circunferência $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = R^2\}$ de raio $R > 0$ centrada na origem do $\mathbb{R}^2$. Essa pode ser descrita por $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\underset{x(t)}{\underset{\shortparallel}{R\cos t}}, \underset{y(t)}{\underset{\shortparallel}{R\text{sen}t}})$.

E à medida que t percorre $\mathbb{R}^1, f(t)$ percorre a circunferência.



Dizemos que tal f é uma parametrização para a circunferência. Ou que essa foi parametrizada por f. De fato a circunferência é a imagem de f. O parâmetro t pode ser pensado como uma coordenada ao longo da circunferência, o ângulo.

Outro exemplo é $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto f(t) = (R\cos t, R\text{sen}t, \frac{2\pi}{p}t)$ que descreve a hélice de raio $R > 0$ e passo $p > 0$.



E a medida que t percorre $\mathbb{R}^1$, $f(t)$ sobe tal hélice em torno do eixo z. Tudo se passa como se a função tomasse $\mathbb{R}^1$ e o mergulhasse em $\mathbb{R}^3$, mas de maneira a enrolá-lo em torno do eixo z. Fabricando a hélice que é um objeto unidimensional no $\mathbb{R}^3$.

Reparamos que no caso da circunferência, dois ângulos que diferissem por um múltiplo de 2π determinariam um mesmo ponto, $f(t) = f(t + 2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Para a hélice entretanto a associação $t \mapsto f(t)$ é injetora. Os pontos da hélice estão em correspondência "um a um" com a coordenada angular t.

Exemplo 2. Campos Escalares.

Consideremos agora uma placa metálica aquecida em seu centro por uma chama. O ponto aquecido atinge, digamos, 100° ℃. Os outros pontos da placa também têm sua temperatura elevada, como mostramos na figura 4. Cada ponto atinge uma temperatura que cai com a distância ao ponto de aquecimento.

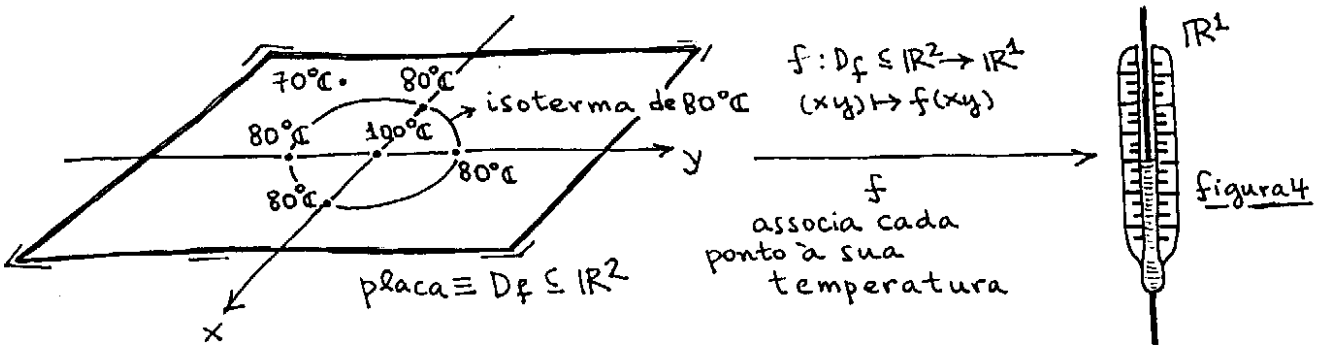


figura4

Vamos procurar um modelo matemático que descreva a situação. Primeiro fixamos eixos x e y na placa. Dessa forma cada ponto da placa fica identificado com o par de números dado por suas coordenadas, $P = (xy)$. Assim sendo, a placa se torna um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, placa $\subseteq \mathbb{R}^2$.

Quanto à temperatura, nos inspiramos na coluna de Mercúrio de um termômetro para concluir que o conjunto das possíveis temperaturas assumidas pode ser identificado como um subconjunto do $\mathbb{R}^1$. E dessa forma o "campo de temperaturas sobre a placa" (vide figura 4) pode ser definido por, ou identificado com, uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ que associa cada ponto $P = (x, y) \in$ placa $\equiv D_f$ à sua temperatura $f(x, y) \in \mathbb{R}^1$.

Analogamente definimos campos escalares no $\mathbb{R}^n$ através de funções do tipo $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ que associam o valor real $f(P) \in \mathbb{R}^1$ a cada ponto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$.

Na figura 4 mostramos a circunferência formada pelos pontos que estão a 80° ℃, i.e., a isoterma de 80° ℃. Em geral para $f : A \to B$ definimos para cada $y \in B$ o subconjunto de A dado por $\{x \in A \text{ t.q. } f(x) = y\}$ como sendo "o conjunto de nível de f correspondente ao valor y". A tal isoterma é um exemplo de conjunto de nível, como é uma curva, a chamamos de curva de nível (notamos que a isoterma de 100° ℃ é um único ponto e que a de 110° ℃ é o conjunto vazio).

Podemos fazer um gráfico para o nosso campo de temperaturas. Para construir o gráfico G_f de um campo escalar $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, adicionamos a cada ponto $(xy) \in D_f$ uma terceira coordenada. Dada por $f(x, y)$, em nosso caso a temperatura do ponto (xy).

O gráfico $G_f = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x, y) \in D_f \text{ e } z = f(xy)\}$ é uma superfície bidimensional no $\mathbb{R}^3$ que se projeta sobre D_f (no nosso caso, a placa).

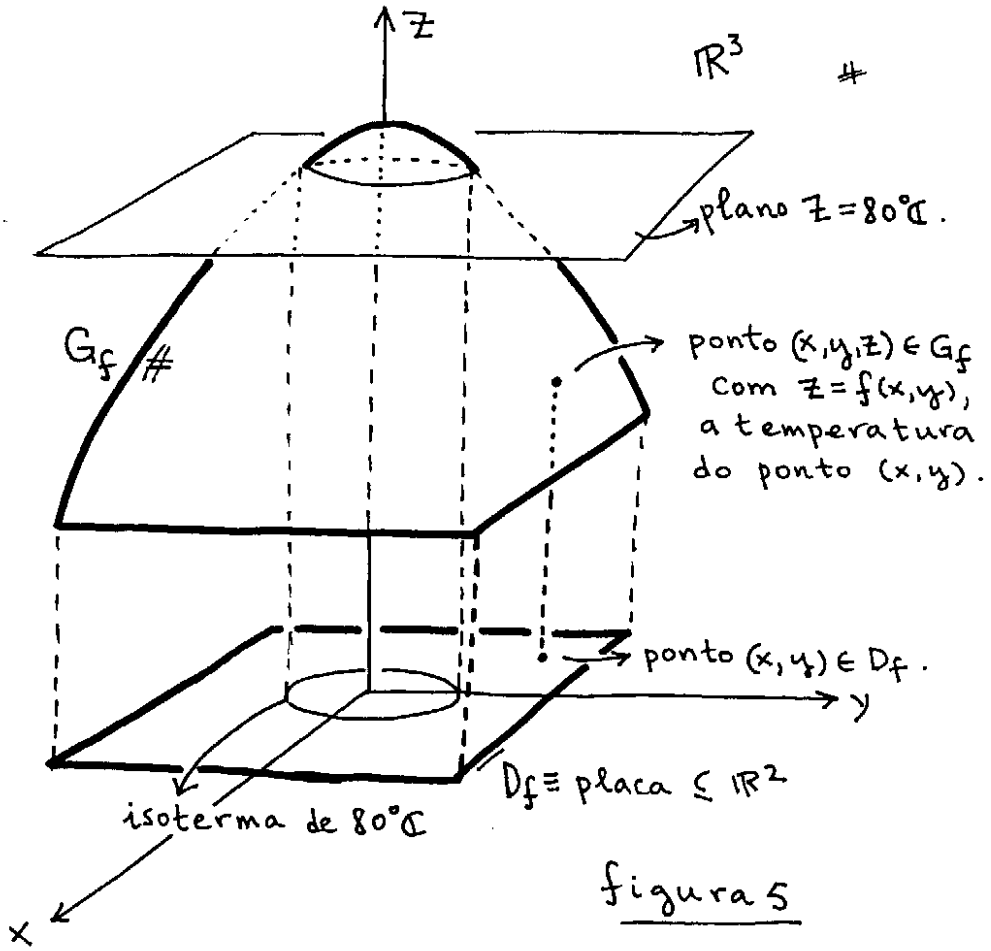
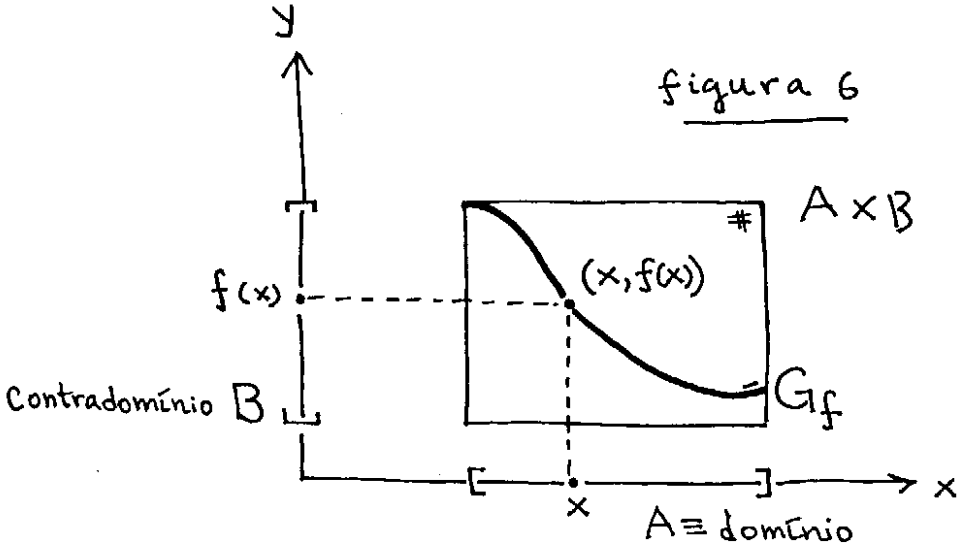


figura 5

Reparamos que a intersecção de G_f com o plano $z = 80°$ ℃ é uma curva congruente à isoterma de 80° ℃ que se projeta sobre ela. Em geral definimos o gráfico $f : A \to B$ como sendo o subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ (do domínio pelo contradomínio de f) dado por $G_f = \{(x, y) \in A \times B \text{ t.q. } y = f(x)\}$, que representamos esquematicamente na figura 6.



Sempre identificaremos $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^{m+n}$. Por exemplo. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}^3$ através de $((x, y), z) = (x, y, z)$ e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ por $((x, y), (z, w)) = (x, y, z, w)$. Com essa identificação, a definição que havíamos dado para gráficos de campos escalares no $\mathbb{R}^2$ coincide com a geral.

O potencial elétrico de uma carga pontual q colocada na origem do $\mathbb{R}^3$ é um campo escalar. Dado por $f : \underbrace{\mathbb{R}^3 - \{\text{origem}\}}_{Df} \to \mathbb{R}^1, f(xyz) = \dfrac{Kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ onde $K > 0$ depende das unidades empregadas. No caso os conjuntos de nível típicos são esferas, chamadas de superfícies de nível de f, ou de equipotenciais do potencial f.

Notamos que é comum definirmos curvas e superfícies como conjuntos de nível de um campo escalar no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

Quando definimos a circunferência em $\mathbb{R}^2$ pela equação $x^2 + y^2 = 1$, i.e. $\{(xy) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1\}$, estamos identificando a circunferência com a curva de nível de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, g(x, y) = x^2 + y^2$, correspondente ao valor $g = 1$.

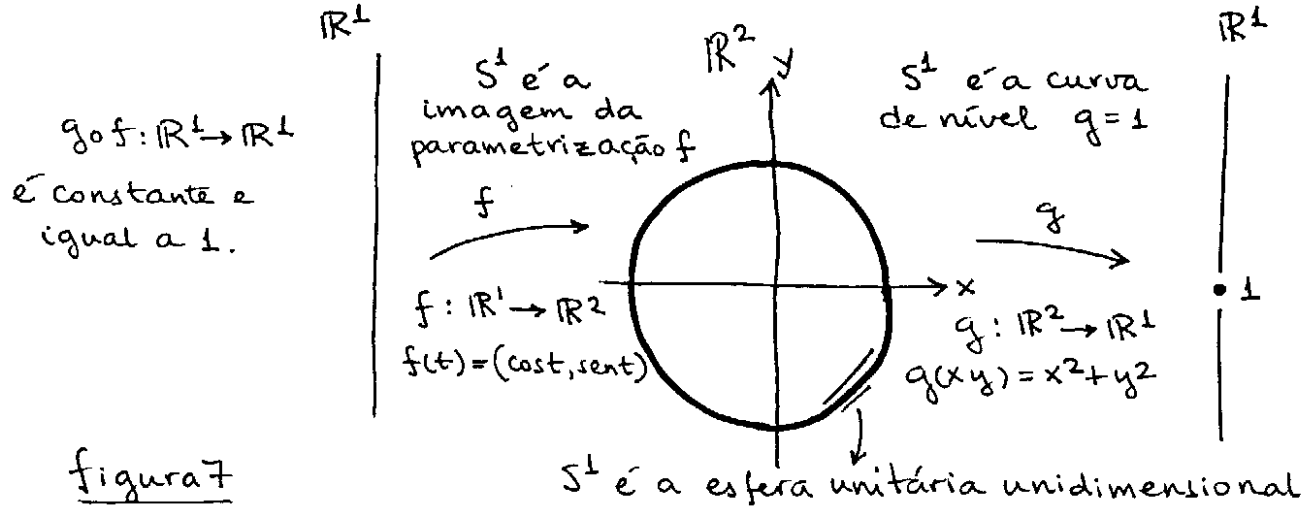


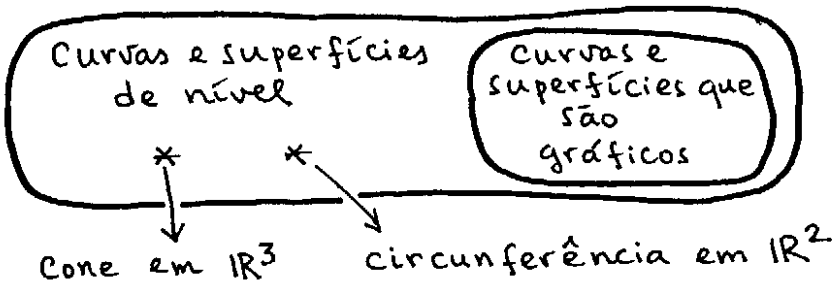
figura 7

No exemplo 1, vimos que tal circunferência também pode ser descrita como a imagem de $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Como é de se esperar, a composta $g \circ f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ é constante e igual a 1. De fato $g(f(t)) = g(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

Quando definimos um cone em $\mathbb{R}^3$ pela equação $z^2 = x^2 + y^2$, i.e. $\{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $z^2 = x^2 + y^2\}$, estamos identificando tal cone com a superfície de nível de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1, g(xyz) = z^2 - x^2 - y^2$, correspondente ao valor $g = 0$. Veremos no exemplo 4 que também podemos descrever superfícies parametricamente, como a imagem de uma função.

Finalmente notamos que por vezes curvas e superfícies podem ser descritas como gráficos de campos escalares no $\mathbb{R}^1$ e no $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Se uma curva é dada por $G_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $y = h(x)\}$ para $h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, também pode ser descrita como a curva de nível de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, g(xy) = y - h(x)$. E a superfície $G_h = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $z = h(xy)\}$ é a superfície de nível de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1, g(xyz) = z - h(xy)$. Entretanto a circunferência e o cone são conjuntos de nível que não podem ser descritos como gráficos.

figura 8



"Todos os gráficos são conjuntos de nível, mas nem todos conjuntos de nível são gráficos".

Exemplo 3. Campos Vetoriais.

Consideramos o escoamento de um fluido no plano. Em cada ponto P do plano, denotamos por $f(P)$ o vetor velocidade do elemento de fluido que passa pelo ponto P.

figura 9

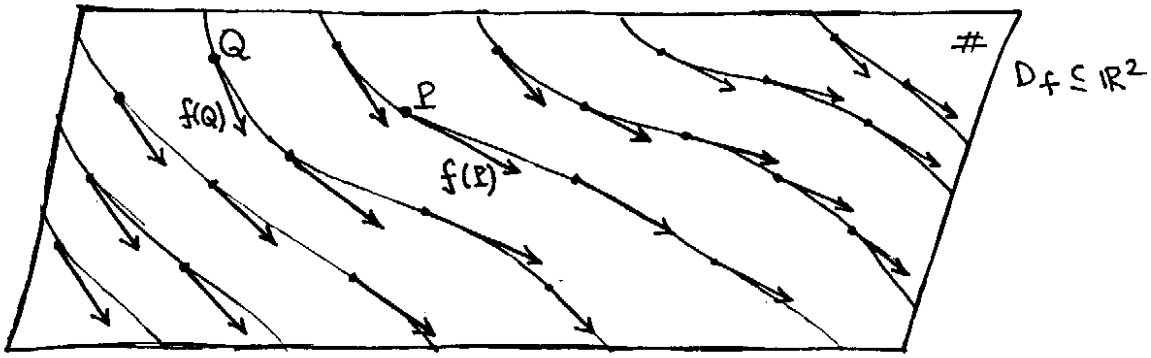


diagrama de campo para $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto f(P) = (f_1(P), f_2(P))$

O "campo de velocidades" assim constituido pode ser descrito por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa cada ponto $P = (xy) \in D_f$ à velocidade $f(P) = (f_1(P), f_2(P))$ do elemento de fluido naquele ponto. As funções $f_j : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, j = 1, 2$, dão as componentes do vetor em cada ponto.

Em geral um campo vetorial no $\mathbb{R}^n$ é dado por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e associa cada ponto $P \in D_f$ ao vetor $f(P) \in \mathbb{R}^n$ que representa alguma grandeza vetorial associada aquele ponto.

A figura 9 é um exemplo de diagrama de campo. Atarrachamos uma seta representando $f(P)$ para cada $P \in D_f$.

Mesmo para um campo vetorial no $\mathbb{R}^2$, o seu gráfico seria um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^4$. E não podemos vizualizá-lo diretamente, como fizemos no caso de um campo escalar no $\mathbb{R}^2$.

Os diagramas de campo fazem as vezes dos gráficos para os campos vetoriais. Para designar um ponto do plano precisamos de um par de números reais. E para escolher a seta atarrachada naquele ponto precisamos de outro par. Assim sendo o diagrama é de fato um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^4$. Tal espaço quadrimensional corresponde ao espaço onde estão contidos os possíveis diagramas de campo em $\mathbb{R}^2$. Ou a um plano com uma seta indefinida em cada ponto. Analogamente o $\mathbb{R}^3$ pode

ser visto como o plano com um escalar indefinido em cada ponto, ou o espaço onde estão contidos os possíveis gráficos de campos escalares em $\mathbb{R}^2$.

Na figura 9, além das setas, desenhamos uma família de curvas. Em cada ponto P uma curva da família é tangente ao vetor $f(P)$ naquele ponto. Em nosso exemplo tais curvas representam o movimento do fluido. E são chamadas em geral de linhas de campo do campo vetorial f.

Consideremos agora o seguinte exemplo, $f : \mathbb{R}^2 - \{\text{origem}\} \to \mathbb{R}^2$ é dado por

$$f(xy) = \left(\frac{-\alpha y}{x^2+y^2}, \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\right), \quad \alpha > 0.$$

Efetuando o produto interno de $f(P)$ com o vetor (xy) temos que $f(P)$ é ortogonal em cada ponto ao vetor que liga $P = (xy)$ à origem.

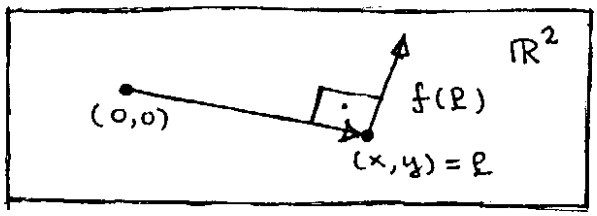


figura 10

Dado um campo vetorial $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sempre podemos associar ao mesmo um campo escalar $||f|| : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ dado pelo seu módulo. Ou seja, se $P \in D_f$ definimos $||f||(P) = ||f(P)||$ como sendo o módulo do vetor $f(P)$. Dizemos que $||f||$ é o módulo de f.

Em nosso exemplo

$$||f(P)|| = \left[\left(\frac{-\alpha y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha x}{x^2+y^2}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\alpha}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

E o módulo de tal campo cai com o inverso da distância à origem em $\mathbb{R}^2$.

Apresentamos então o diagrama de campo para f

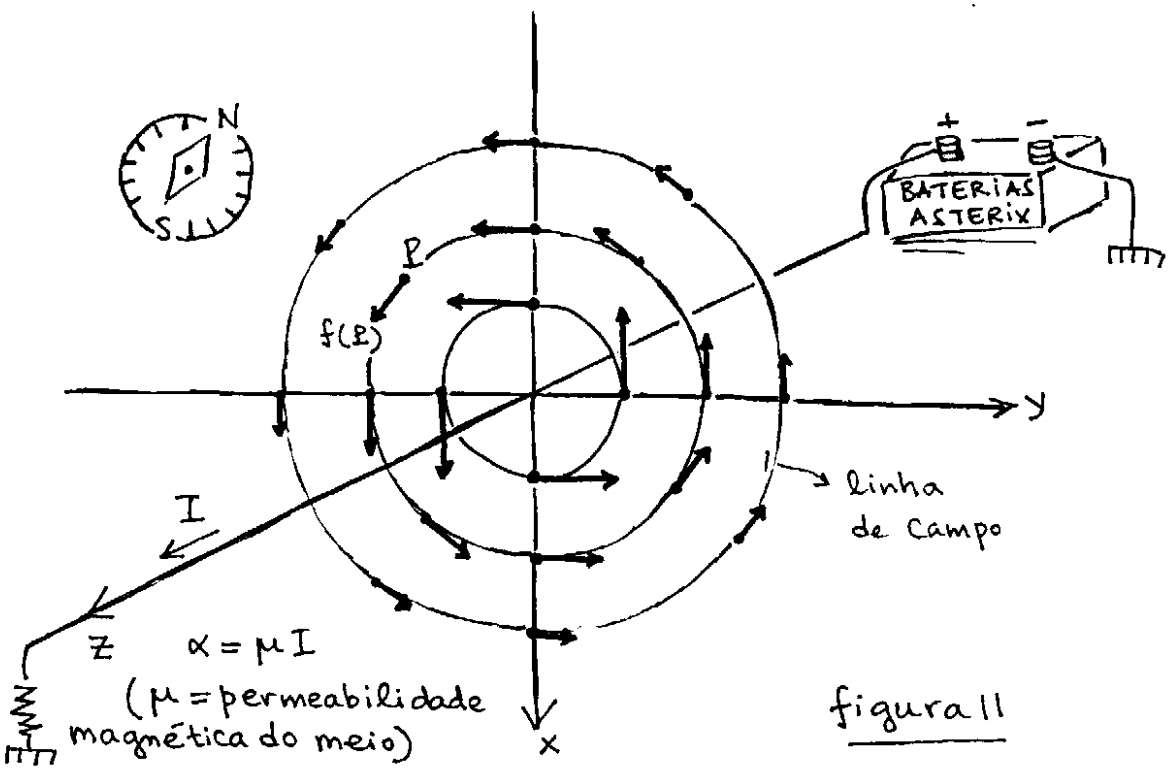


figura 11

As linhas de campo são circunferências centradas da origem. O campo descrito corresponde ao campo magnético gerado por uma corrente elétrica constante percorrendo o eixo z.

Outro exemplo é o campo elétrico gerado por uma carga q colocada na origem do $\mathbb{R}^3$ (supomos a carga pontual), dado por $f : \mathbb{R}^3 - \{\text{origem}\} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(xyz) = \left(\frac{kqx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{kqy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{kqz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \quad \text{com } k > 0.$$

É usual denotar a tripla (xyz) por $\vec{r} = (xyz)$ e seu módulo por $r = ||\vec{r}|| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Então a expressão acima pode ser abreviada, $f(\vec{r}) = \frac{kq\vec{r}}{r^3}$.

Notamos que tal campo é proporcional, para cada P, ao vetor (xyz) que liga P à origem. Por essa razão dizemos que o campo é radial. Quanto ao seu módulo, $||f(\vec{r})|| = \left|\left|\frac{kq\vec{r}}{r^3}\right|\right| = \frac{k|q|}{r^2}$, diminui com o quadrado da distância à origem.

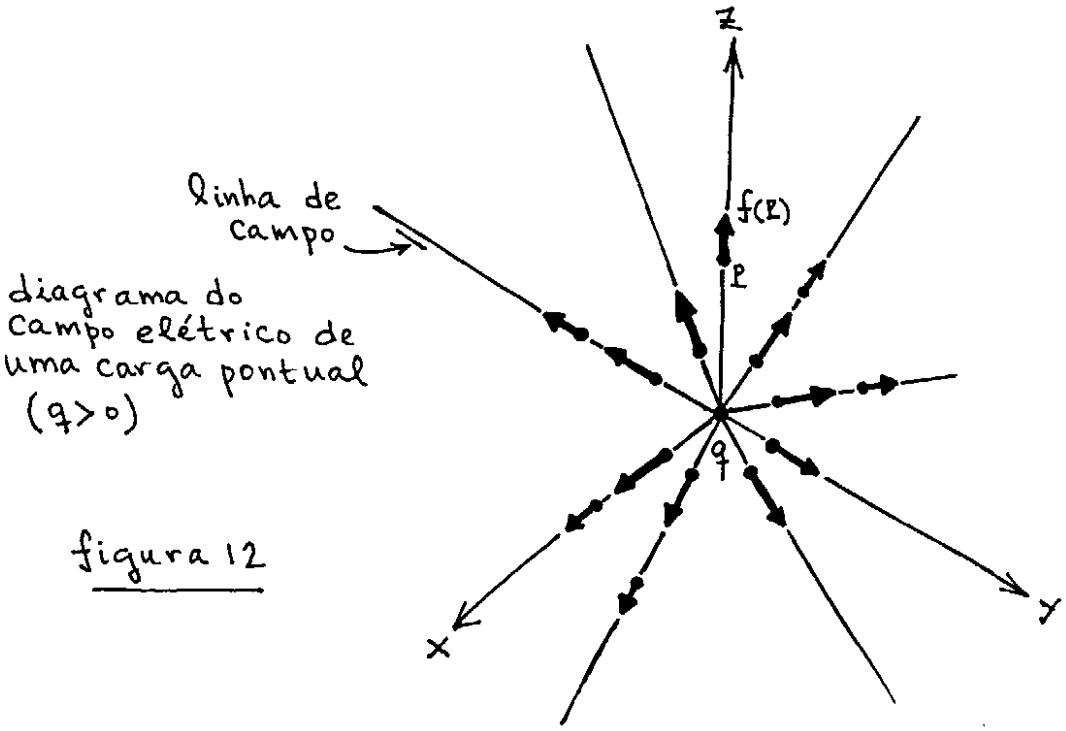


figura 12

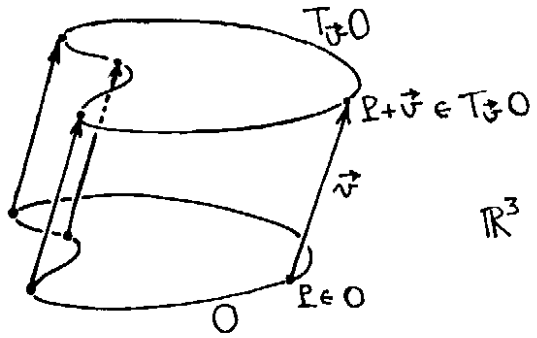
As linhas de campo são semi-retas radiais partindo da origem.

Exemplo 4. Superfícies Parametrizadas.

Dado um subconjunto $O \subseteq \mathbb{R}^3$, adicionamos um vetor fixo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a cada ponto desse subconjunto. O subconjunto resultante $T_{\vec{v}}O = \{P + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $P \in O\}$ é chamado de translação de O pelo vetor $\vec{v}$.

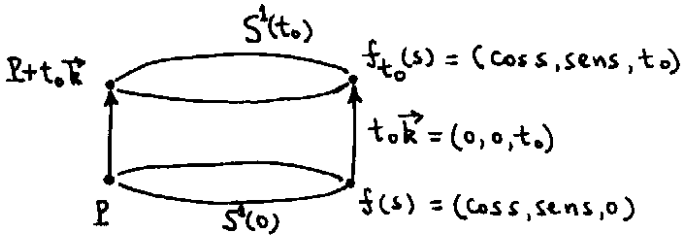
translação $T_{\vec{v}}O$ de $O \subseteq \mathbb{R}^3$ pelo vetor $\vec{v}$.

figura 13



Se O representa um objeto geométrico (curva, superfície, etc...), $T_{\vec{v}}O$ representa um objeto do mesmo tipo e com a mesma forma de O, porém em posição diferente. Os subconjuntos O e $T_{\vec{v}}O$ são exemplos de subconjuntos congruentes no $\mathbb{R}^3$. Definiremos mais precisamente o conceito de congruência no "Exemplo 5".

Consideremos, por exemplo, a circunferência $S^1(0) = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0\}$ contida no plano xy (i.e., plano $z = 0$) do $\mathbb{R}^3$. A mesma tem parametrização $f_0 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3, s \mapsto f_0(s) = (\cos s, \text{sen} s, 0)$. Se transladamos tal circunferência pelo vetor $\vec{v} = t_0\vec{k} = (0, 0, t_0)$, paralelo ao eixo z, obtemos a circunferência $S^1(t_0) = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ tq $x^2 + y^2 = 1$ e $z = t_0\}$.



translação $S^1(t_0)$ de $S^1(0)$ pelo vetor $(0, 0, t_0)$

figura 14

Adicionamos $(0, 0, t_0)$ às coordenadas dos pontos de $S^1(0)$ para obter $S^1(t_0)$. A partir da parametrização $f_0(s) = (\cos s, \text{sen} s, 0)$ que tinhamos para $S^1(0)$ obtemos a parametrização $f_{t_0}(s) = (\cos s, \text{sen} s, t_0)$ para $S^1(t_0)$.

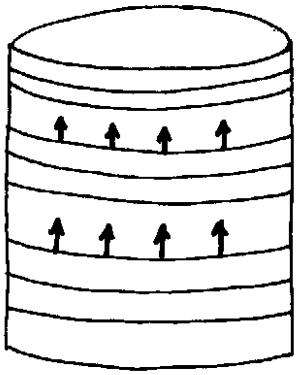


figura 15

Agora consideremos o cilindro $\{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $x^2 + y^2 = 1\} =$ (convença-se) $= \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} S^1(t_0)$. Tal cilindro é a união de todas translações $S^1(t_0)$ de $S^1(0)$ para $t_0 \in \mathbb{R}$. Podemos vizualizá-lo como uma translação contínua de $S^1(0)$ ao longo do eixo z. Da mesma forma que $S^1(0)$ pode ser visto como o movimento giratório de um ponto, o cilindro pode ser visto como movimento translacional de uma circunferência. Trocando t_0 por uma variável real t em $f_{t_0}(s)$ obtemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(s,t) = (\cos s, \text{sen} s, t)$, tal que a imagem de f coincide com o cilindro.

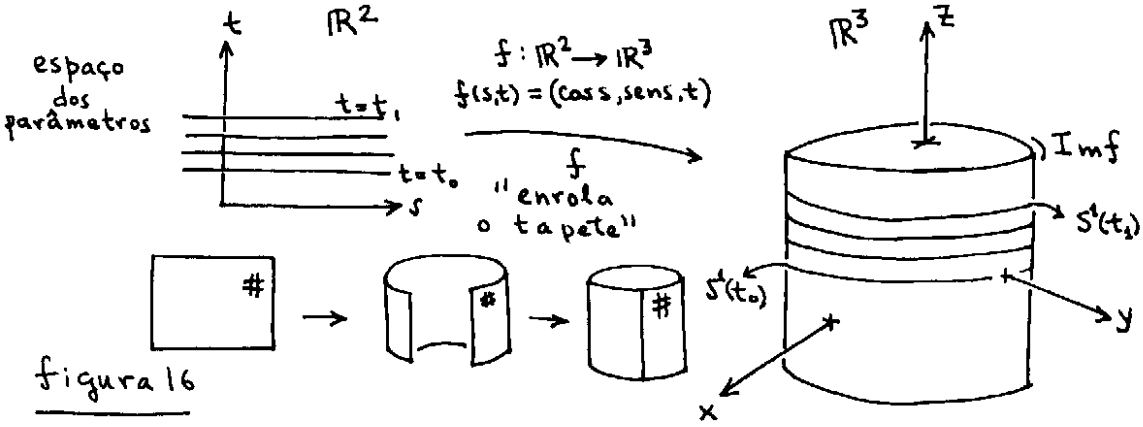


figura 16

Podemos pensar que f toma o plano (s,t) e o mergulha em $\mathbb{R}^3$ de forma a curvá-lo. Fabricando o cilindro que é um objeto bidimensional no $\mathbb{R}^3$.

Para cada $t = t_0$ fixo, a aplicação $s \mapsto f(s, t_0)$ parametriza, através da variável livre s, a circunferência correspondente à intersecção do cilindro com plano $z = t_0$. Se fixamos $s = s_0$ a aplicação $t \mapsto f(s_0 t)$ parametriza, através da variável livre t, uma reta vertical na superfície do cilindro. De fato, $f(s_0 t) = (\cos s_0, \text{sen} s_0, t) = P_0 + t\vec{D}$ parametriza a reta que passa pelo ponto $P_0 = (\cos s_0, \text{sen} s_0, 0)$ do plano xy e tem vetor diretor $\vec{D} = (0,0,1)$.

As circunferências e retas formam duas famílias de curvas análogas aos "paralelos e meridianos" sobre a superfície da Terra. O par de parâmetros $(s_0 t_0)$ determina um único ponto $f(s_0 t_0)$ na superfície do cilindro. Esse ponto fica no cruzamento da circunferência ("paralelo") $t = t_0$ com a reta vertical ("meridiano") $s = s_0$. Dizemos que tal aplicação f parametriza o cilindro. Ou que o cilindro é parametrizado por f. Uma maneira de se descrever superfícies bidimensionais em $\mathbb{R}^3$ é através de aplicações $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

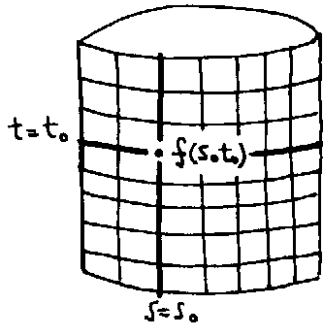
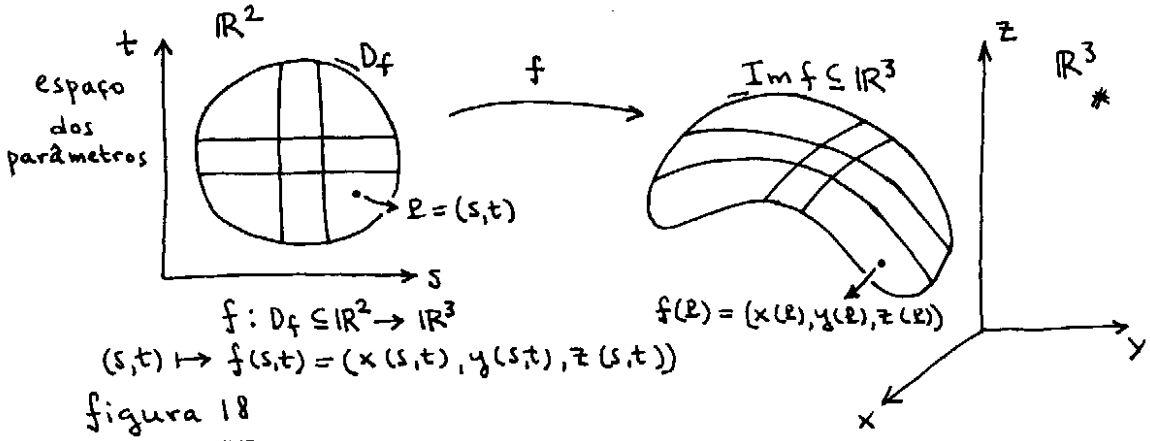


figura 17

apropriadas. Então a superfície parametrizadada é a imagem de f. Podemos entender que a parametrização f toma uma região do plano e a mergulha em $\mathbb{R}^3$. Dando-lhe a forma de uma superfície



$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(s,t) \mapsto f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$

figura 18

As curvas $t = t_0$ constante e $s = s_0$, parametrizadas respectivamente por s e t através de $s \mapsto f(s,t_0) = (x(s,t_0), y(s,t_0), z(s,t_0))$ e $t \mapsto f(s_0,t) = (x(s_0,t), y(s_0,t), z(s_0,t))$ determinam um sistema de coordenadas sobre a superfície.

Consideremos agora o cone, dado pela equação $z^2 = x^2 + y^2$ em $\mathbb{R}^3$. Cujas intersecções com os planos $x = 0$ e $y = 0$ são respectivamente os pares de retas $z = \pm y$ e $z = \pm x$.

Também podemos vizualizar tal cone como uma circunferência que se move ao longo do eixo z. Mas agora com raio variável e igual a $|z|$, dado que $z^2 = x^2 + y^2$.

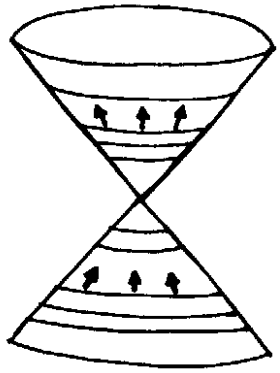


figura 19

Por analogia com a parametrização obtida anteriormente para o cilindro temos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $f(s,t) = (t\cos s, t\text{sen}s, t)$ para o cone (como para o caso do cilindro, é bom identificar o eixo z com o tempo). Para cada $t = t_0$ fixo, a variável livre s parametriza a curva $s \mapsto f(st_0)$, i.e., $s \mapsto (t_0 \cos s, t_0\text{sen}s, t_0)$. Tal curva corresponde a uma circunferência de raio $|t_0|$, centrada no eixo z, e presa no plano $z = t_0$. Se por outro lado fixamos $s = s_0$,a variável livre t parametriza a curva $t \mapsto f(s_0 t)$, ou seja, $t \mapsto (t\cos s_0, t\text{sen}s_0, t) = P_0 + t\vec{D}$ que corresponde a uma reta que passa pela origem $P_0 = (0,0,0)$ e tem vetor diretor $\vec{D} = (\cos s_0, \text{sen}s_0, 1)$. Além de f caracterizar o cone como sua imagem, através das circunferências $t = t_0$ e retas $s = s_0, f$ coloca um sistema de coordenadas (com "paralelos" e "meridianos") sobre o cone.

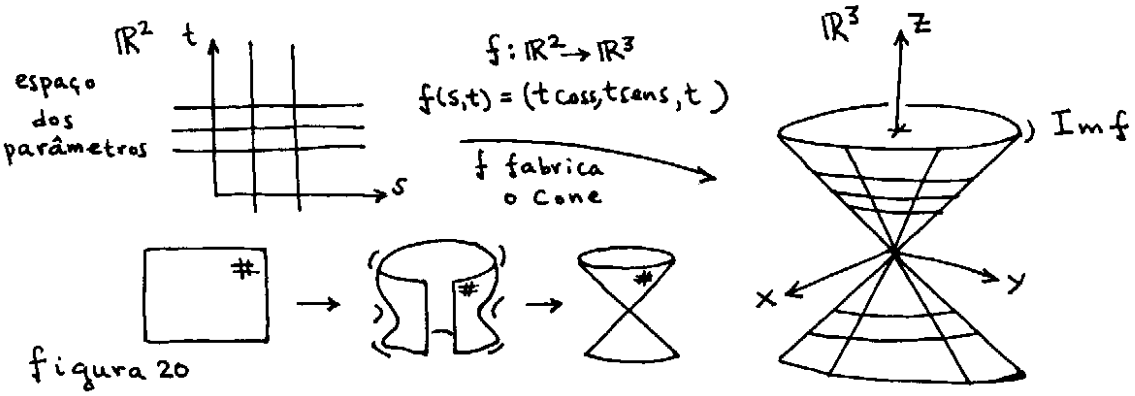


figura 20

Assim estabelecemos uma parametrização para o cone.

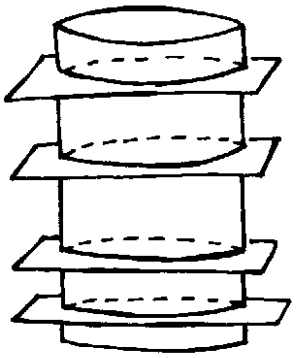


figura 21

Dizemos que uma superfície S é cilindricamente simétrica com respeito à direção z quando as intersecções de S com os planos $z = z_0$ constante, para $z_0 \in \mathbb{R}$, formam uma família de curvas congruentes entre si. E de forma que a congruência entre duas de tais curvas é sempre realizada por uma translação paralela ao eixo z. Então chamamos tais curvas de geratrizes de S, e tal superfície pode ser gerada pela translação contínua de uma de suas geratrizes ao longo do eixo z. Podemos analogamente definir superfícies cilindricamente simétricas com respeito a uma direção genérica.

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é cilindricamente simétrico, mas o cone $z^2 = x^2 + y^2$ não é. S é cilindricamente simétrica com respeito ao eixo z quando sua equação, ou o campo escalar que a define como superfície de nível, independente de z. Para tanto identificamos o plano $xy \subseteq \mathbb{R}^3$ com o espaço $\mathbb{R}^2$. E a intersecção Γ_0 de S com tal plano com uma curva no $\mathbb{R}^2$. Então temos $S = \bigcup_{z_0 \in \mathbb{R}} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $(xy) \in \Gamma_0$ e $z = z_0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $(xy) \in \Gamma_0\}$. Quanto à parametrização de S, essa fica determinada a partir da parametrização da geratriz Γ_0. Se Γ_0 é parametrizada por $s \mapsto (X(s), Y(s))$, pomos $f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ com $x(s,t) = X(s), y(s,t) = Y(s)$ e $z(s,t) = t$ para S.

O elipsóide cilíndrico $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ é cilindricamente simétrico com respeito ao eixo z e tem como geratriz a elipse $\{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e $z = 0\}$. Tal elipse, vista como uma curva em $\mathbb{R}^2 \equiv$plano xy, tem parametrização dada por $s \mapsto (a\cos s, b\text{sen}s)$. Portanto $f(s,t) = (a\cos s, b\text{sen}s, t)$ parametriza o elipsóide cilíndrico.

O cone não tem simetria cilíndrica, mas tem alguma simetria. De fato o cone pode ser gerado pela rotação de uma reta inclinada em torno do eixo z. Mesmo o cilindro, ao invés da translação da circunferência ao longo do eixo z, pode ser visto como a rotação de uma reta vertical em torno do eixo z. Dizemos que tal reta é uma geratriz (no sentido de rotação) para o cilindro. As superfícies assim geradas são chamadas de superfícies de revolução e serão melhor estudadas no "Exemplo 5".

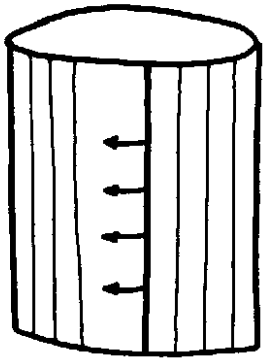


figura 22

Outra superfície de revolução é o parabolóide de revolução dado por $\{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $z = x^2 + y^2\}$. Se queremos insistir que essa superfície é gerada por uma circunferência que se move ao longo do eixo z, como no caso do cone, tal circunferência deve ter o raio variável. E igual a $\sqrt{z}$, dado que $x^2 + y^2 = z$. Por analogia com as parametrizações do cilindro e do cone, tomamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(s,t) = (t\cos s, t\text{sen}s, t^2)$ para o parabolóide. Fixando $t = t_0$ obtemos a curva $s \mapsto (t_0\cos s, t_0\text{sen}s, t_0^2)$, uma circunferência de raio $|t_0|$ dada pela intersecção do parabolóide com o plano $z = t_0^2$. Fixando $s = s_0$, obtemos uma das parábolas geratrizes do parabolóide de revolução, dada por $t \mapsto (t\cos s_0, t\text{sen}s_0, t^2)$.

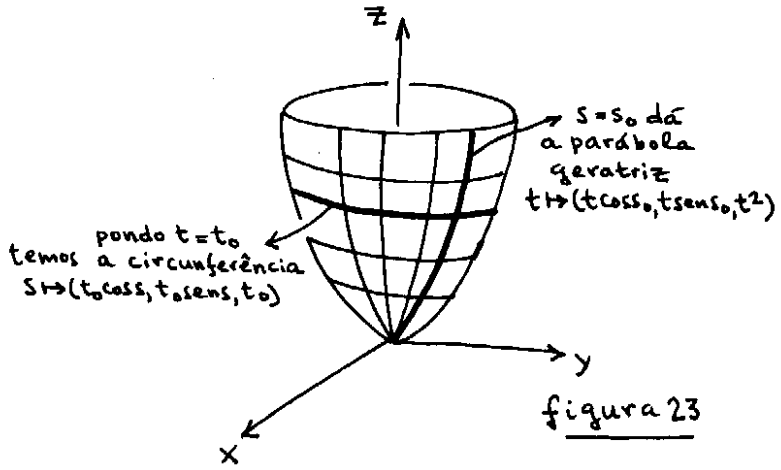
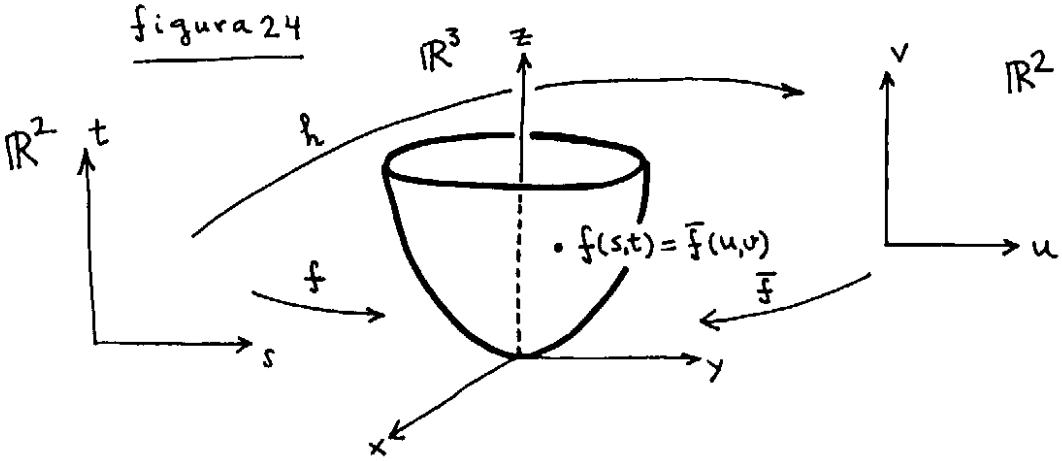


figura 23

Tais circunferências e parábolas geratrizes determinam um sistema de "paralelos" e "meridianos" sobre o parabolóide.

Reparamos que tal parabolóide também pode ser caracterizado como o gráfico do compo escalar $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, (x,y) \mapsto g(x,y) = x^2 + y^2$. Ou seja, parabolóide $= G_g = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $(x,y) \in D_g \equiv \mathbb{R}^2$ e $z = g(x,y)\}$. Ademais reparamos que todo gráfico dessa forma tem uma parametrização natural onde os parâmetros são identificados com as variáveis x e y. De fato, $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $\overline{f}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e $x(u,v) = u, y(u,v) = v, z(u,v) = g(u,v)$ parametriza G_g. Para o parabolóide $\overline{f}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$. Essa parametrização difere da anterior e introduz outro sistema de paralelos e meridianos no parabolóide.

figura 24



Na parametrização $\overline{f}$ as curvas $u = u_0$ bem como $v = v_0$ correspondem a parábolas obtidas por intersecções dos planos $x = u_0$ e $y = v_0$ com o parabolóide, respectivamente.

É interessante relacionar as duas parametrizações, $(s,t) \mapsto f(s,t)$ e $(u,v) \mapsto \overline{f}(u,v)$ que colocamos no parabolóide. Para tanto basta impor a condição $f(s,t) = \overline{f}(u,v)$ (quando os dois pares de parâmetros correspondem ao mesmo ponto imagem, fig. 24) que obtemos $u = t\cos s$ e $v = t\text{sen}s$. Então a aplicação $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(s,t) \mapsto h(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$ com $u(s,t) = t\cos s, v(s,t) = t\text{sen}s$, tem a propriedade de que $\overline{f} \circ h = f$, i.e., $f(s,t) = \overline{f}(h(s,t))$. É a função h que faz a transição entre os dois sistemas de coordenadas, transformando a parametrização $\overline{f}$ em f, através da "composição com h à direita". No próximo exemplo trataremos de funções similares a h; que também descreverão trocas de parametrização.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

$\overline{f} \circ h = f$

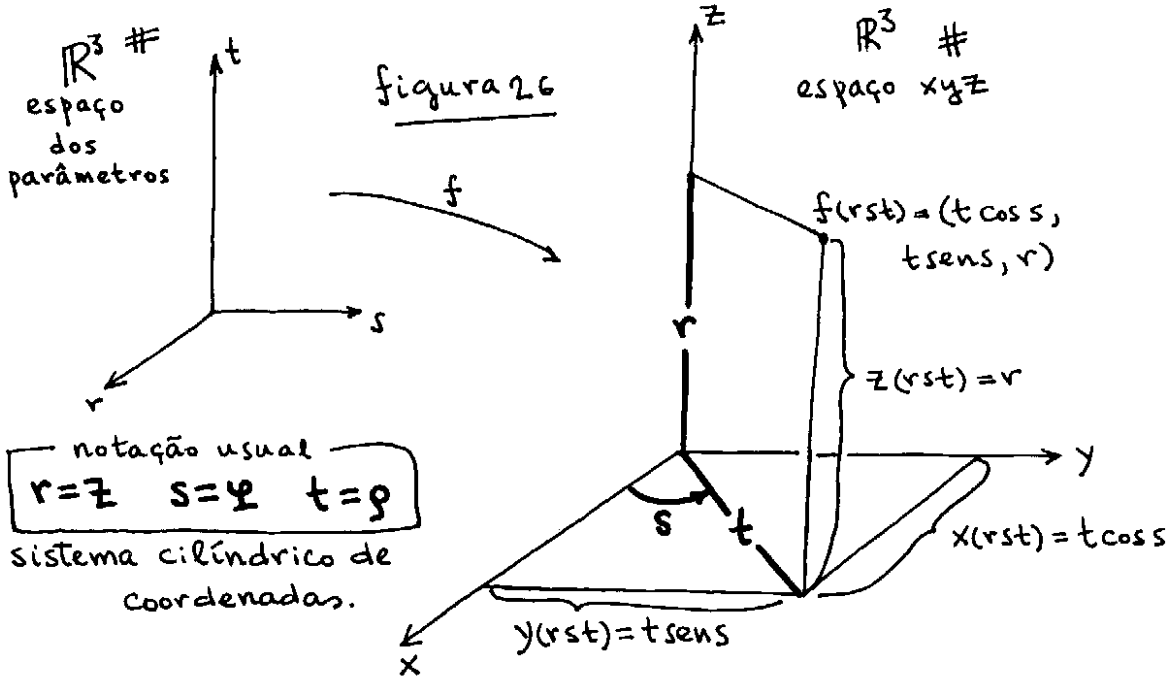
figura 25

Exemplo 5. Sistemas de Coordenadas.

Sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ serão dados por aplicações do tipo $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $(r,s,t) \mapsto f(r,s,t) = (x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$; e podem ser interpretados como reparametrizações de regiões do contradomínio, que corresponde ao espaço (xyz), identificado com o espaço concreto de nossa percepção. Nesse contexto o espaço (rst) passa a ser um espaço abstrato de parâmetros auxiliares.

Um exemplo é o sistema cilíndrico de coordenadas dado por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $(r,s,t) \mapsto f(r,s,t) = (t\cos s, t\text{sen}s, r)$, na notação acima $x(r,s,t) = t\cos s, y(r,s,t) = t\text{sen}s$ e $z(rst) = r$. O domínio de f é um espaço de parâmetros dado por $D_f = \{(r,s,t) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } t \geq 0\}$ e seu contra domínio, como dissemos, é o espaço concreto de nossa percepção.

Notamos que $[x(rst)]^2 + [y(rst)]^2 = t^2$ de forma que $t \geq 0$ é a distância do ponto imagem $f(rst)$ ao eixo z.



Por sua vez $r = z(rst)$ é a terceira coordenada do ponto imagem $f(rst)$ e s é o ângulo formado entre a projeção do vetor $f(rst) - (000)$ (que liga a origem de $\mathbb{R}^3$ ao ponto $f(rst)$) no plano (xy), e o eixo x (vide fig. 26). É constumeiro se empregar os símbolos z, φ e ρ para os parâmetros r, s e t (respectivamente). O ângulo $\varphi = s$ é chamado de *ângulo equatorial* do ponto $f(rst)$. Em alguns textos constuma-se, além da restrição $t = \rho \geq 0$, impor-se uma restrição sobre o ângulo equatorial. Fazendo-se $0 \leq s = \varphi < 2\pi$ a função f torna-se bijetora para $t \neq 0$

mas perde propriedades interessantes como veremos no livro 2, que segue. Por tais propriedades que estarão ligadas às derivadas de f, não restringiremos $s = \varphi$.

É claro que para $n \in \mathbb{Z}, f(rst) = f(r, s + 2n\pi, t)$, ou seja; o ângulo equatorial do ponto $f(rst)$ fica indefinido a menos de múltiplos de 2π.

As superfícies coordenadas de um dado sistema de coordenadas são superfícies parametrizadas determinadas por $(rst) \mapsto f(rst)$ quando um dos parâmetros é fixado.

No caso do sistema cilíndrico, se fixamos $r = z = z_0$ obtemos planos parametrizados por s e t, através de $(s,t) \mapsto f(z_0 st) = (t\cos s, t\text{sen}s, z_0)$. Fixando $s = \varphi = \varphi_0$ temos semiplanos parametrizados por r e $t, (rt) \mapsto f(r\varphi_0 t) = (t\cos\varphi_0, t\text{sen}\varphi_0, r)$. Com $t = \rho = \rho_0$, temos cilindros de raio ρ_0 centrados no eixo z parametrizados por s e r, $(s,t) \mapsto f(s, r, \rho_0) = (\rho_0 \cos s, \rho_0 \text{sen}s, r)$.

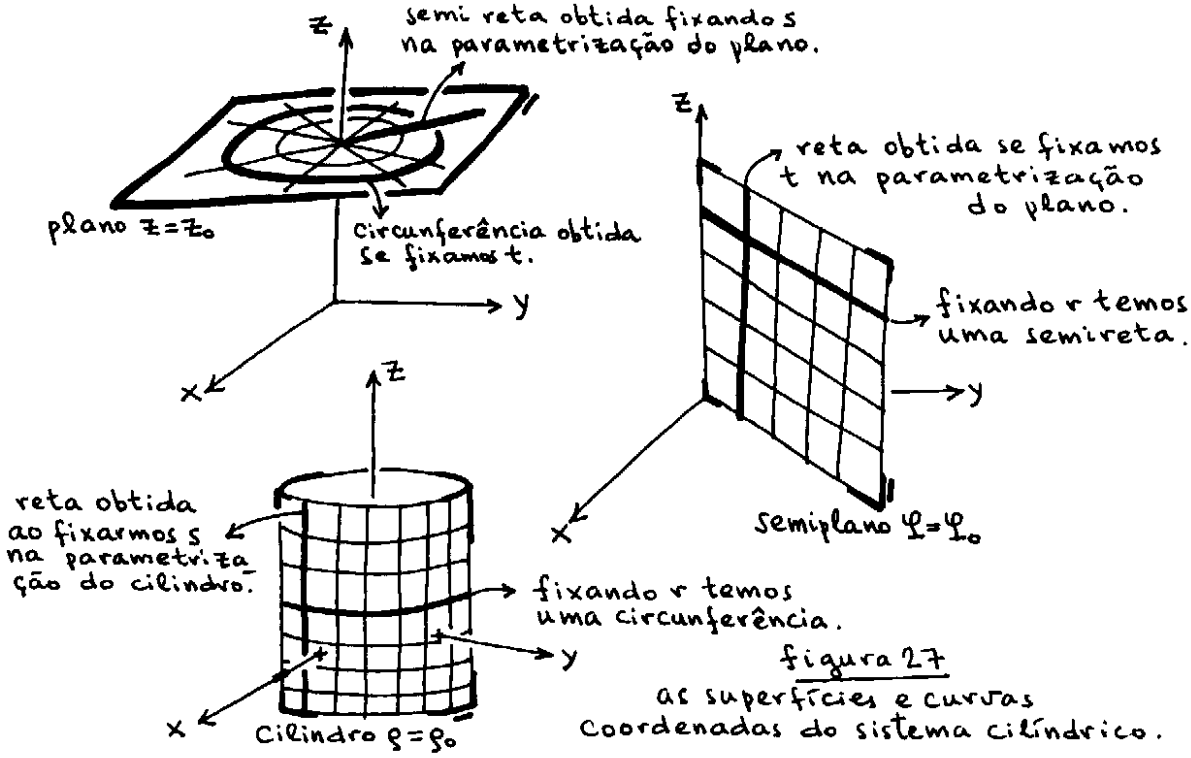


figura 27
as superfícies e curvas coordenadas do sistema cilíndrico.

Quando fixamos dois parâmetros do sistema de coordenadas obtemos as curvas coordenadas que são portanto intersecções das superfícies coordenadas. Cada superfície coordenada tem duas famílias de curvas coordenadas correspondentes aos paralelos e meridianos da sua parametrização (fig. 27).

É interessante notar que uma superfície de revolução, como o parabolóide $z = x^2 + y^2$, tem sua equação independente do ângulo equatorial φ se a mesma é reescrita em termos das coordenadas cilíndricas. No caso do parabolóide temos $z = \rho^2$ (ou

$r = t^2$). Também isso ocorre com o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que também são superfícies de revolução e cujas equações são respectivamente $z^2 = \rho^2$ e $z^2 + \rho^2 = 1$ no sistema cilíndrico.

Como vimos, uma superfície cilindricamente simétrica tem sua equação independente de z, porque as intersecções de planos $z =$ constante com tal superfície dão curvas congruentes entre si, qualquer uma delas podendo ser usada como curva geratriz (tais congruências são efetuadas através de translações paralelas ao eixo z).

Analogamente uma superfície que apresenta simetria de revolução tem sua equação (em coordenadas cilíndricas) independente do ângulo equatorial $\varphi = s$, pois as intersecções dos semi-planos dados por $\varphi =$ constante com tal superfície dão curvas congruentes entre si, qualquer uma delas podendo ser a geratriz (as congruências serão agora efetuadas através de rotações em torno do eixo z).

Observação Sobre Congruência

Dada uma direção $\vec{n}(\vec{n} \in I\!R^3, ||\vec{n}|| = 1)$ podemos escolher nosso sistema de eixos x, y, z, de forma que $\vec{n} = \vec{k}$. Ou seja, de forma que $\vec{n}$ fique na direção do eixo z. Associamos então um sistema de coordenadas cilíndricas aos eixos xyz. De forma que todo ponto $P = (xyz) \in I\!R^3$ pode ser escrito como $P = f(\rho, \varphi, z)$ com $f : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $(\rho, \varphi, z) \mapsto f(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos\varphi, \rho \operatorname{sen}\varphi, z)$.

Definimos daí a rotação por um ângulo α na direção $\vec{n}$ do ponto $P = f(\rho, \varphi, z)$ como sendo o ponto $P' = R_{\vec{n},\alpha} P \equiv f(\rho, \varphi + \alpha, z)$.

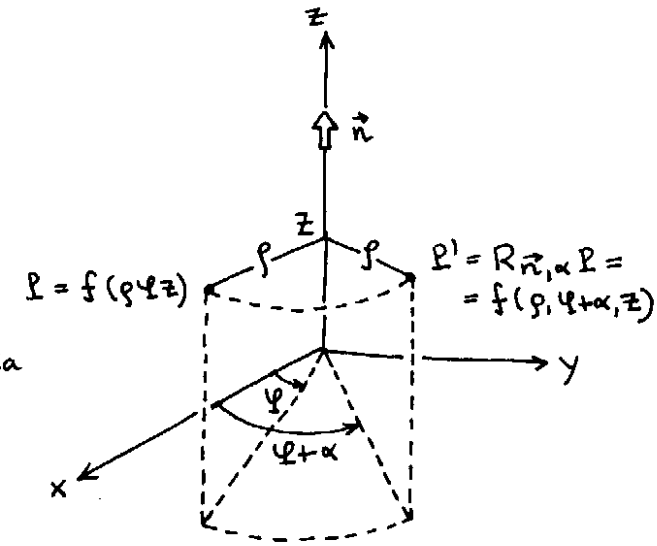


figura 28

a rotação de P por um ângulo α, na direção n, resulta em P'.

Se $O \subseteq \mathbb{R}^3$ definimos a rotação de O por um ângulo α na direção $\vec{n}$ como sendo

$$R_{\vec{n},\alpha}O = \{R_{\vec{n},\alpha}P \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } P \in O\}.$$

Esse é outro subconjunto do $\mathbb{R}^3$ formado pelas rotações $R_{\vec{n},\alpha}P$ de todos pontos $P \in O$. Se O representa um objeto geométrico (curva, superfície, etc...), $R_{\vec{n},\alpha}O$ representa um objeto do mesmo tipo e com a mesma forma de O, mas numa posição diferente. Dizemos que O é congruente a $R_{\vec{n},\alpha}O$ através da rotação $R_{\vec{n},\alpha}$. No "Exemplo 4" havíamos definido a translação $T_{\vec{v}}O$ de O por um vetor $\vec{v}$. Também havíamos dito que O era congruente a $T_{\vec{v}}O$ através da translação $T_{\vec{v}}$.

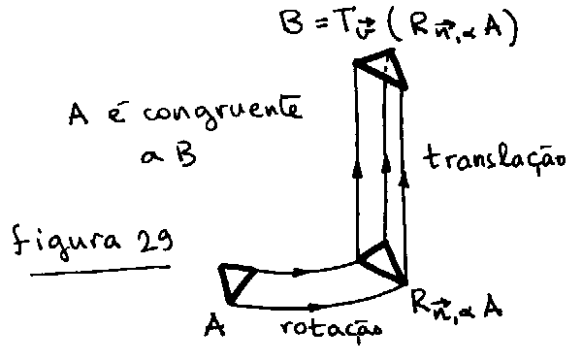


figura 29

Em geral se A e B são subconjuntos do $\mathbb{R}^3$, dizemos que A é congruente a B quando A é levado em B por uma sequência de rotações e/ou translações. A congruência de subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ é um exemplo de relação de equivalência. Para saber do que se trata isso e entender melhor o conceito de congruência, faça o exercício 13. Voltamos agora às superfícies de revolução.

Na figura 30 mostramos as intersecções do parabolóide de revolução com os semiplanos $\varphi = \frac{-\pi}{2}$, $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

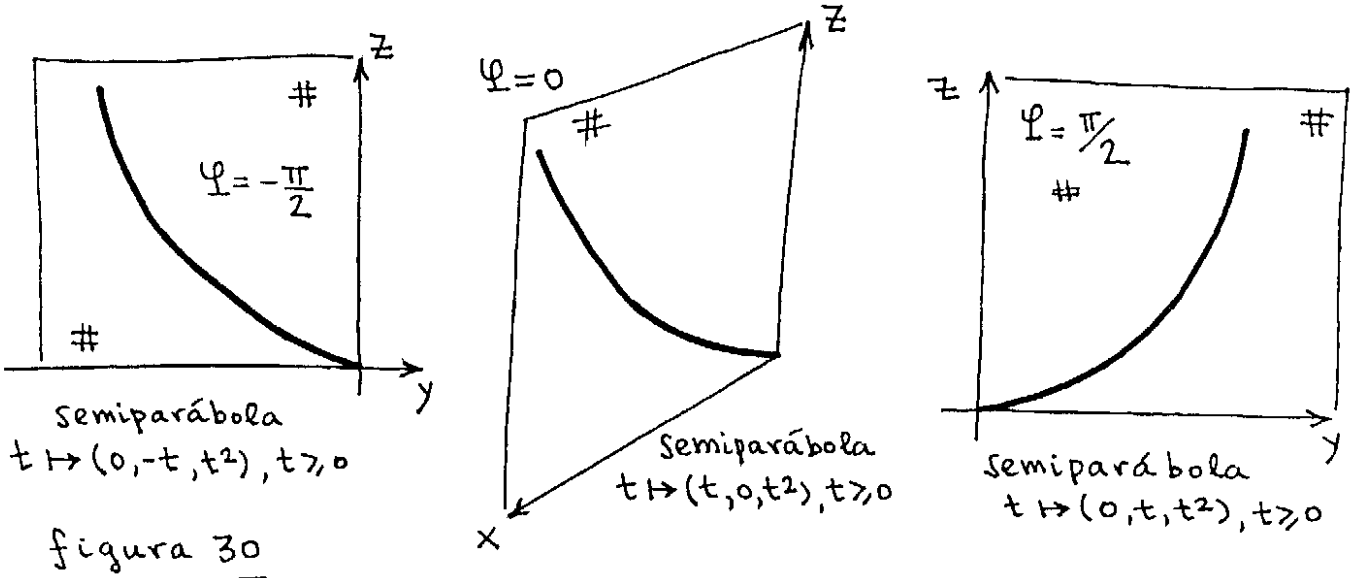


figura 30

Lembramos (fim do "Exemplo 4") que a parametrização de uma superfície cilindricamente simétrica pode ser obtida a partir da parametrização da geratriz $s \mapsto (X(s), Y(s))$ no plano (xy) com a adição de um parâmetro livre na terceira coordenada, $(s,t) \mapsto f(s,t) = (X(s), Y(s), t)$ ou seja $x(s,t) = X(s), y(s,t) = Y(s)$ e $z(s,t) = t$.

Analogamente a parametrização de uma superfície de revolução pode ser obtida à partir da parametrização da geratriz. Se a parametrização da geratriz correspondente ao semiplano $\varphi = 0$ é dada por $x = u(t), z = Z(t)$, a parametrização da geratriz é $y = u(t), z = Z(t)$ no semiplano $\varphi = \pi/2$ e $y = -u(t), z = Z(t)$ no semiplano $\varphi = -\pi/2$ (no caso do parabolóide $u(t) = t, Z(t) = t^2$).

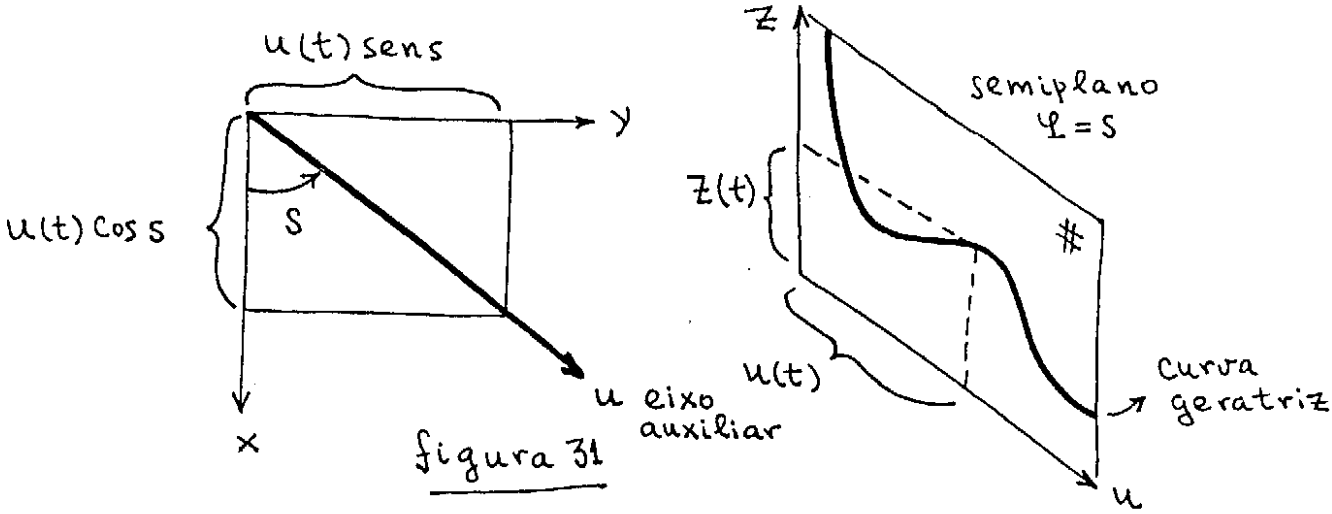


figura 31

Num semiplano genérico $\varphi = s$ temos a curva $t \mapsto (u(t)\cos s, u(t)\text{sen}s, Z(t))$ que mostramos na figura 31. Fazendo s variar como um parâmetro livre obtemos $(s,t) \mapsto (u(t)\cos s, u(t)\text{sen}s, Z(t))$; isto é $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ e $x(s,t) = u(t)\cos s, y(s,t) = u(t)\text{sen}s, z(s,t) = Z(t)$, é a parametrização da superfície de revolução.

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (ou $\rho^2 = 1$), o cone $x^2 + y^2 = z^2$ (ou $\rho^2 = z^2$) e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (ou $\rho^2 + z^2 = 1$) são superfícies de revolução cujas geratrizes estão parametrizadas na figura 32.

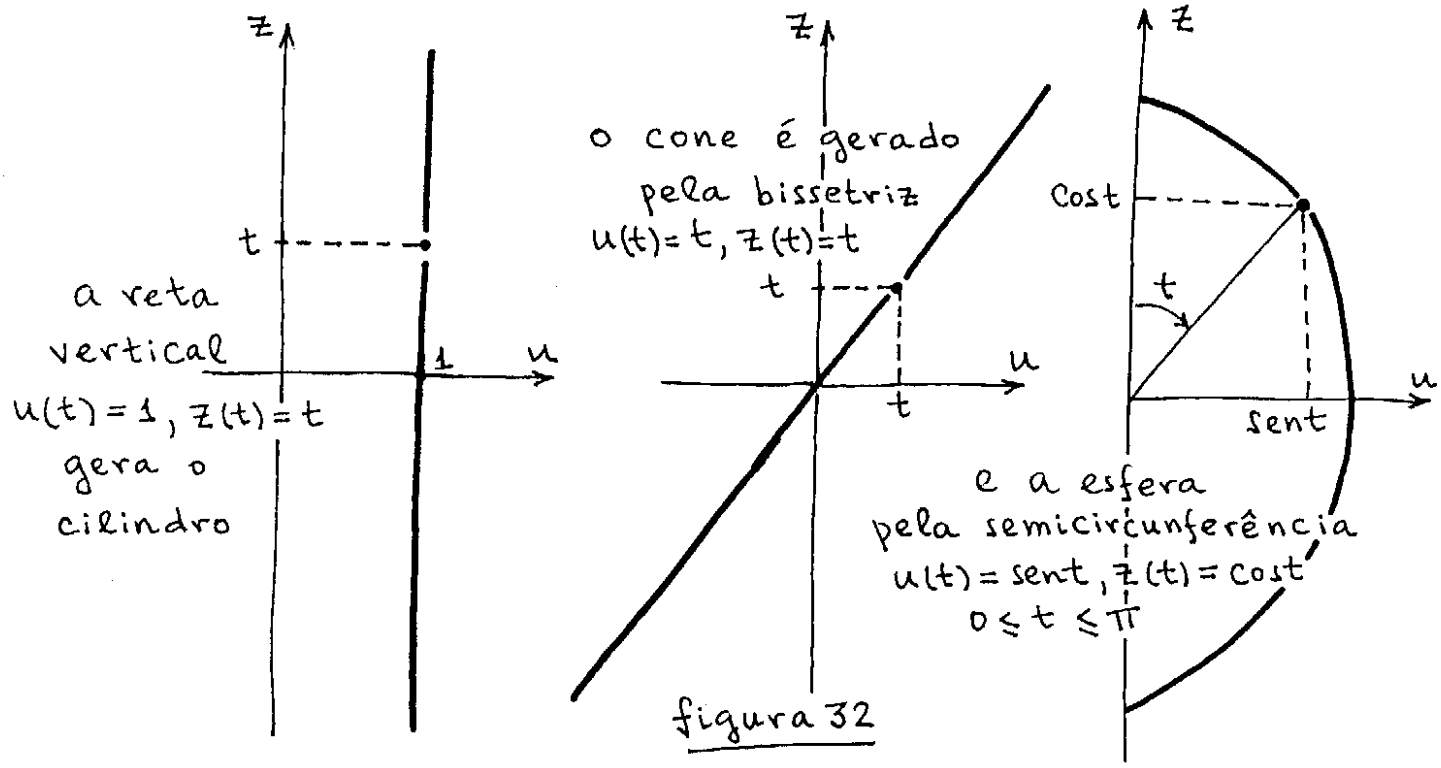


figura 32

Portanto essas superfícies têm parametrizações $(s,t) \mapsto (\cos s, \text{sen} s, t), (s,t) \mapsto (t\cos s, t\text{sen} s, t)$ e $(s,t) \mapsto (\text{sen}t \cos s, \text{sen}t\text{sen}s, \cos t)$ respectivamente. A esfera de raio $R, x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tem portanto a parametrização $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, com $(s,t) \mapsto f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), x(s,t) = R\text{sen}t \cos s, y(s,t) = R\text{sen}t\text{sen}s, z(s,t) = R\cos t$. O parâmetro $s = \varphi$ é o ângulo equatorial do ponto $f(s,t)$, que já aparecia no sistema de coordenadas cilíndricas. O parâmetro t é restrito entre 0 e π, ou seja, $D_f = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq t \leq \pi\}$. A esfera fica parametrizada por dois ângulos, t é chamado de *ângulo azimutal* do ponto $f(s,t)$ e denotado por $\theta, t = \theta$.

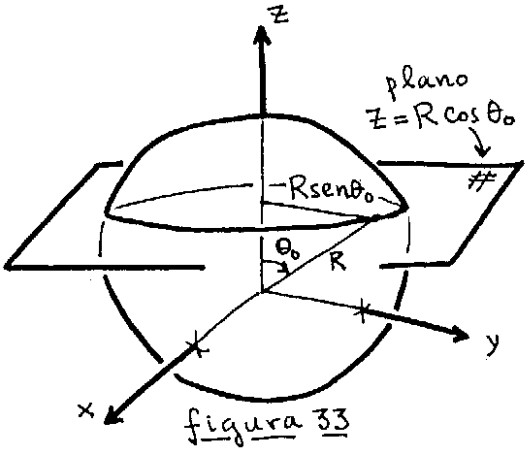


figura 33

As curvas $\theta = \theta_0$ são os equadores da esfera, e correspondem às intersecções da esfera com planos $z = R\cos\theta_0 =$ constante. Essas circunferências são parametrizadas pelo ângulo equatorial através de $\varphi \mapsto (R\text{sen}\theta_0 \cos\varphi, R\text{sen}\theta_0\text{sen}\varphi, R\cos\theta_0)$.

O raio do equador é $R\text{sen}\theta_0$ (figura 33) dependendo do ângulo azimutal fixado (nos polos os equadores colapsam virando pontos).

Fazendo $\varphi = \varphi_0$ obtemos semicircunferências parametrizadas pelo ângulo azimutal através de $\theta \mapsto (R\text{sen}\theta \cos\varphi_0, R\text{sen}\theta\text{sen}\varphi_0$ $R\cos\theta)$. Essas semicircunferências são os meridianos da esfera e têm raio R, visto que o seu centro coincide com o da esfera (vide figura 34).

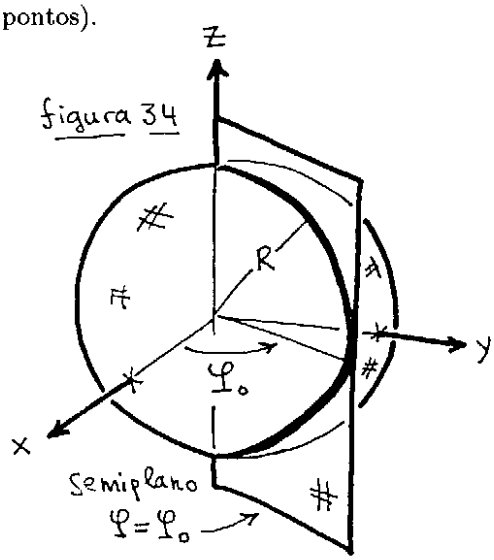


figura 34

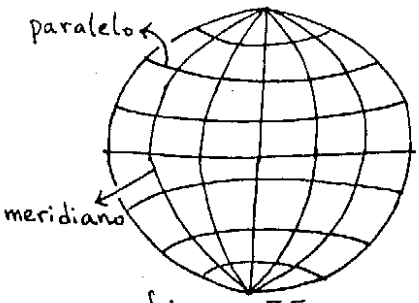


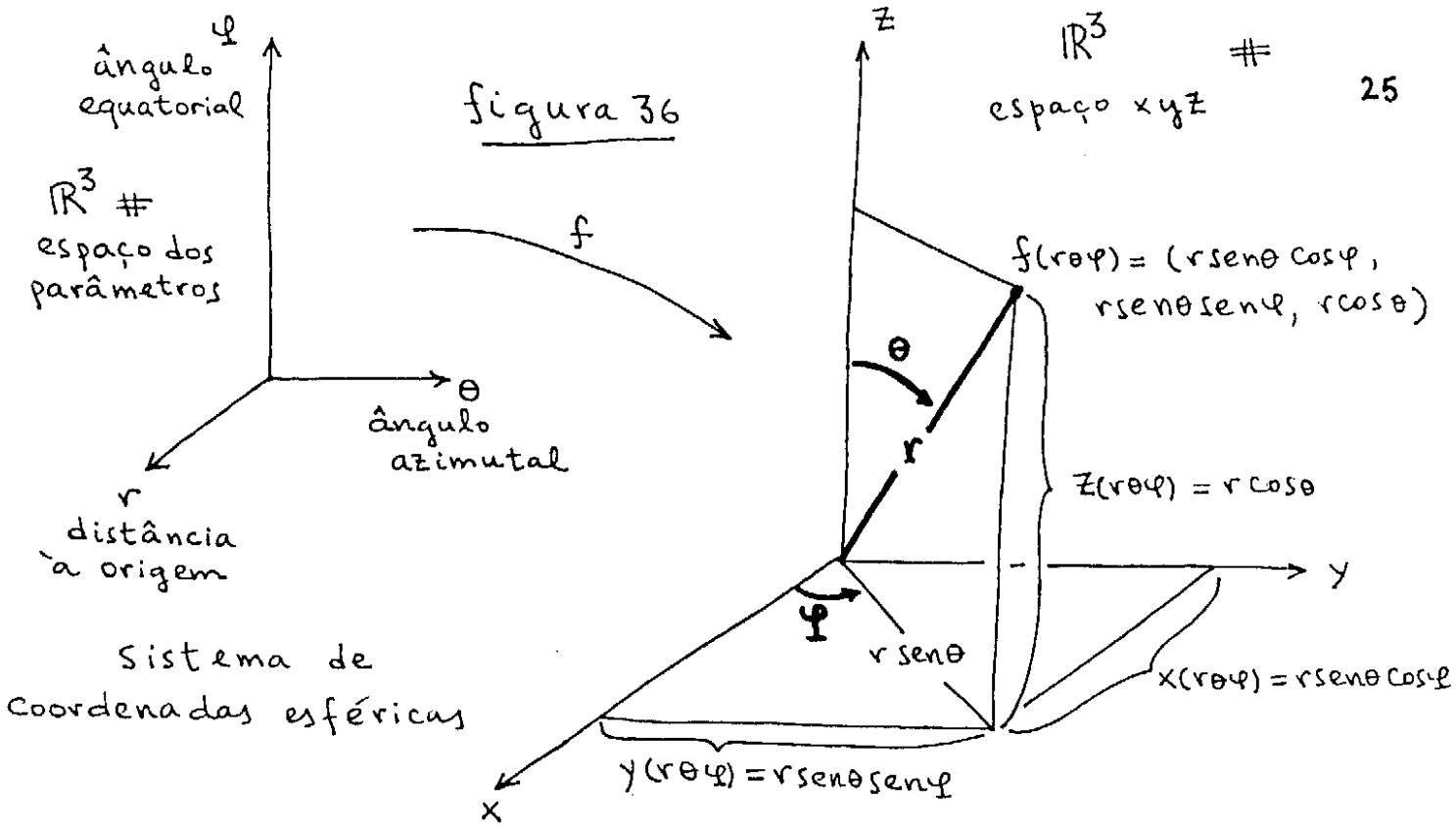
figura 35

Os paralelos e meridianos formam um sistema de coordenadas sobre a esfera = Imf. Cada ponto $f(\varphi_0, \theta_0)$ da esfera fica no cruzamento do paralelo $\theta = \theta_0$ com o meridiano $\varphi = \varphi_0$

Fazendo R variar como se fosse um parâmetro livre r na parametrização da esfera, obtemos o sistema de coordenadas esféricas $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $(r\theta\varphi) \mapsto f(r\theta\varphi) = (\underbrace{r\text{sen}\theta\cos\varphi}_{x(r\theta\varphi)}, \underbrace{r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi}_{y(r\theta\varphi)}, \underbrace{r\cos\theta}_{z(r\theta\varphi)})$ e $D_f = \{(r\theta\varphi) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi\}$.

É fácil ver que $r \geq 0$ é a distância do ponto imagem $f(r\theta\varphi)$ à origem, φ é o ângulo equatorial e θ é o ângulo azimutal do ponto $f(r\theta\varphi)$. O ângulo azimutal é o ângulo entre o vetor $(x(r\theta\varphi), y(r\theta\varphi), z(r\theta\varphi))$ (que liga a origem ao ponto $f(r\theta\varphi)$), e o eixo z. Por motivos que veremos no próximo livro costuma-se ordenar a tripla de coordenadas esféricas da forma $(r\theta\varphi)$.

figura 36



Sistema de coordenadas esféricas

A superfície coordenada correspondente a $r = r_0$ constante é a esfera parametrizada por $(\theta, \varphi) \mapsto (r_0 \text{sen}\theta \cos\varphi, r_0 \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, r_0 \cos\theta)$. Fazendo $\theta = \theta_0$ obtemos um semicone parametrizado por r e φ, através de $(r, \varphi) \mapsto (\underbrace{r\text{sen}\theta_0 \cos\varphi}_{x(r,\varphi)}, \underbrace{r\text{sen}\theta_0 \text{sen}\varphi}_{y(r,\varphi)}, \underbrace{r\cos\theta_0}_{z(r,\varphi)})$.

Essa superfície coordenada é metade do cone dado por $z^2 = tg^2\theta_0(x^2 + y^2)$, a outra metade é obtida quando fixamos $\theta = \pi - \theta_0$. Esse cone tem abertura θ_0 e não $\pi/4$ como a do cone $z^2 = x^2 + y^2$ estudado anteriormente.

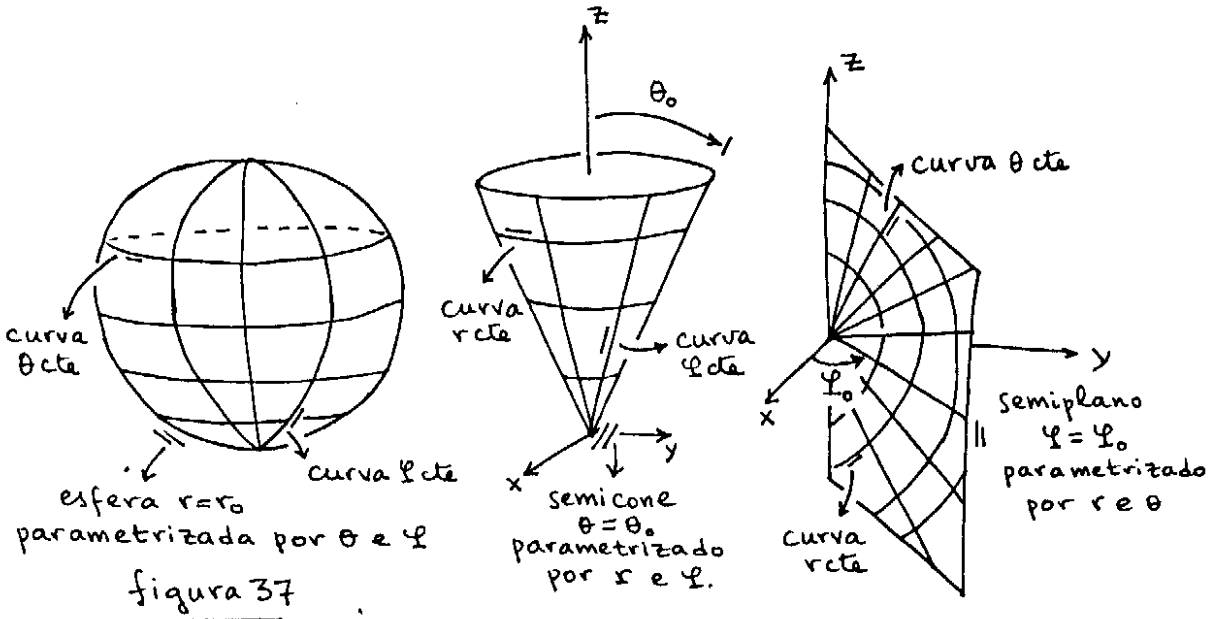


figura 37

Superfícies e curvas coordenadas no sistema esférico.

Finalmente se tomamos $\varphi = \varphi_0$ obtemos um semiplano. Com a parametrização $(r, \theta) \mapsto (r\text{sen}\theta \cos\varphi_0, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi_0, r\cos\theta)$, diferente daquela dada ao semiplano $\varphi = \varphi_0$ no sistema cilíndrico.

Assim como o movimento do ponto gera a curva e o da curva gera a superfície, o movimento de uma superfície gera uma região do espaço. A parametrização do movimento do ponto dá origem a uma curva parametrizada ("Exemplo 1") e se parametrizamos o movimento de tal curva por um segundo parâmetro obtemos uma superfície parametrizada ("Exemplo 4"). E o movimento dessa superfície, se parametrizado por um terceiro parâmetro, dá origem a um sistema de coordenadas. Que parametriza uma região do espaço.

Foi a expansão/contração da esfera parametrizada pelo seu raio que empregamos para construir o sistema de coordenadas esféricas. O tal raio, ou distância à origem, é um terceiro parâmetro além dos ângulos azimutal e equatorial.

É interessante relacionar os sistemas esférico e cilíndrico. Pondo $f_{esf}(r\theta\varphi) = f_{cil}(\rho\varphi z)$ (mesmo ponto imagem) obtemos $\rho = r\text{sen}\theta$ e $z = r\cos\theta$. Definimos então $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $(r\theta\varphi) \mapsto h(r\theta\varphi) = (\underbrace{r\text{sen}\theta}_{\rho(r\theta\varphi)}, \underbrace{\varphi}_{\varphi(r\theta\varphi)}, \underbrace{r\cos\theta}_{z(r\theta\varphi)})$. A aplicação h definida entre os espaços de parâmetros $(r\theta\varphi)$ e $(\rho\varphi z)$ estabelece a transição entre os sistemas cilíndrico e esférico. Temos $f_{esf}(r\theta\varphi) = f_{cil}(h(r\theta\varphi))$, isto é, $f_{esf} = f_{cil} \circ h$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_{esf.}"'] & & \mathbb{R}^3 \arrow[dl, "f_{cil.}"] \\ & \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

figura 38

O próprio sistema de eixos (xyz) pode ser associado com um sistema de coordenadas no $\mathbb{R}^3$. O sistema de coordenadas dado pela aplicação identidade $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, y, z)$ no qual x, y e z são os próprios parâmetros. Tal sistema é chamado de sistema cartesiano de coordenadas. As superfícies coordenadas são dadas pelos planos x, y ou $z =$ constante.

Para finalizar a discussão sobre sistemas de coordenadas, notamos que também podem ser interpretados como deformações de objetos geométricos. Da mesma forma que interpretamos as curvas e superfícies parametrizadas como deformações de objetos uni e bidimensionais, interpretamos os sistemas de coordenadas como deformações de objetos tridimensionais

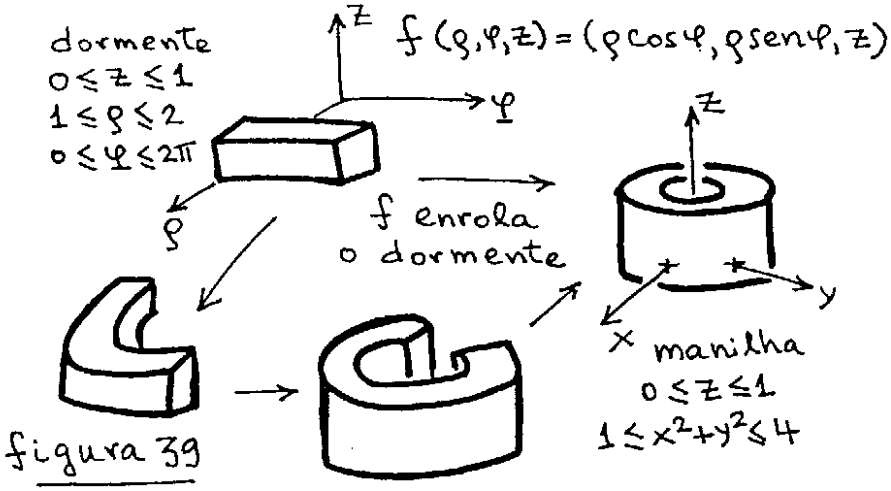


figura 39

Mostramos na figura 39 como a função associada ao sistema de coordenadas cilíndricas transforma o dormente dado por $0 \leq z \leq 1$, $1 \leq \rho \leq 2$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ no espaço (ρ, φ, z) na manilha dada por $0 \leq z \leq 1$ e $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ no espaço (xyz). Faça uma analogia da figura 39 com as figuras 3, 16 e 19.

E para finalizar nosso livrinho faremos uma observação,

Observação Final

As curvas e superfícies parametrizadas bem como os sistemas de coordenadas (exemplos 1, 4 e 5) são exemplos de parametrizações. O contradomínio das parametrizações é o espaço real de nossa percepção, suas imagens são objetos geométricos. Objetos nos quais as parametrizações determinam sistemas de coordenadas. Objetos que também podem ser vistos como o resultado de deformações efetuadas pelas parametrizações.

Por outro lado os campos escalares e vetoriais (exemplos 2 e 3) têm seu domínio como sendo uma região do espaço concreto de nossa percepção. E associam valores reais ou vetoriais a esses pontos. Podem definir objetos geométricos contidos em seu domínio como conjuntos de nível.

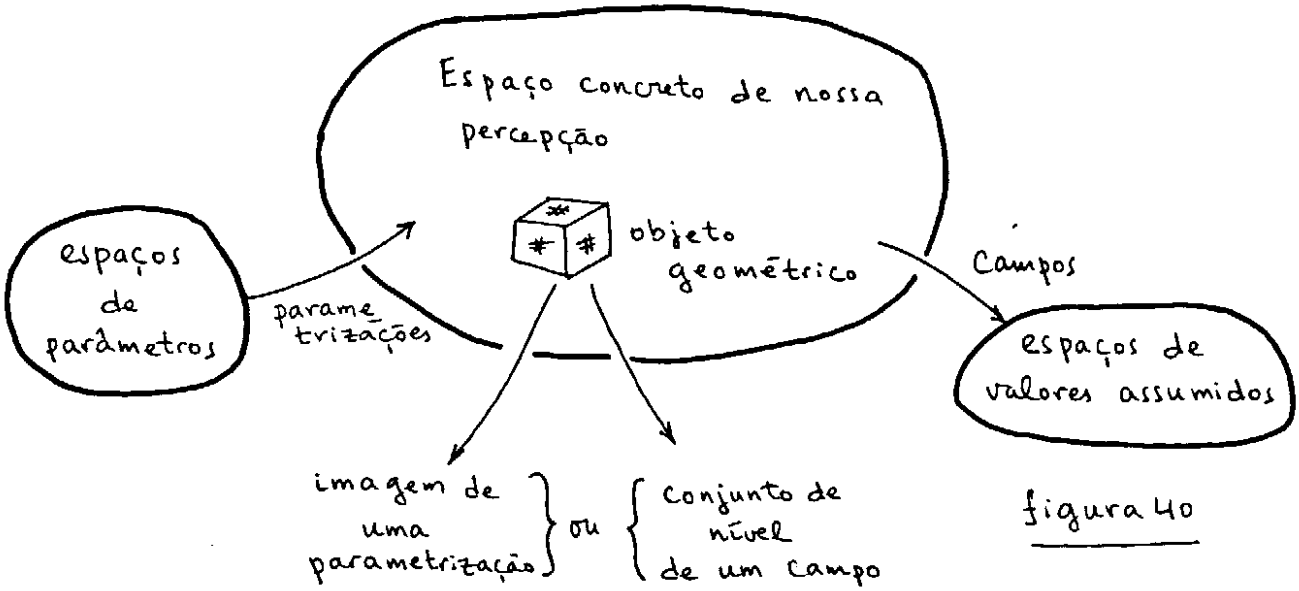


Figura 40

Asas à imaginação. Por vezes trocamos o "espaço concreto de nossa percepção" por espaços um tanto quanto abstratos. Em Termodinâmica, ao invés do tridimensional (xyz) empregamos o $(k+2)$ dimensional espaço $(E, V, N_1, N_2, \ldots, N_k)$. Tal é o espaço dos possíveis estados de certos sistemas termodinâmicos (em equilíbrio). Cada estado é então designado pela energia, pelo volume e pelos números de moles de cada elemento químico componente do sistema. A entropia é um campo escalar em tal espaço, $S : D_S \subseteq \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}^1$, e associa o estado $(E, V, N_1, \ldots, N_k)$ à sua entropia $S(E, V, N_1, \ldots, N_k)$. O conjunto dos estados com uma dada entropia é um conjunto de nível de S e pode ser interpretado como um objeto geométrico em $\mathbb{R}^{k+2}$. Caso o estudante se interesse, esse enfoque à Termodinâmica é bastante enfatizado no texto Thermodynamics de H. B. Callen (J. Wiley ε Sons, 1985).

Bom, voltemos ao $\mathbb{R}^3$ para fixar idéias. Chamamos a atenção para o caráter

dual dos campos e parametrizações. Os campos partem do, e as parametrizações chegam ao espaço concreto de nossa percepção. É natural pensarmos na composição das funções associadas aos campos e parametrizações.

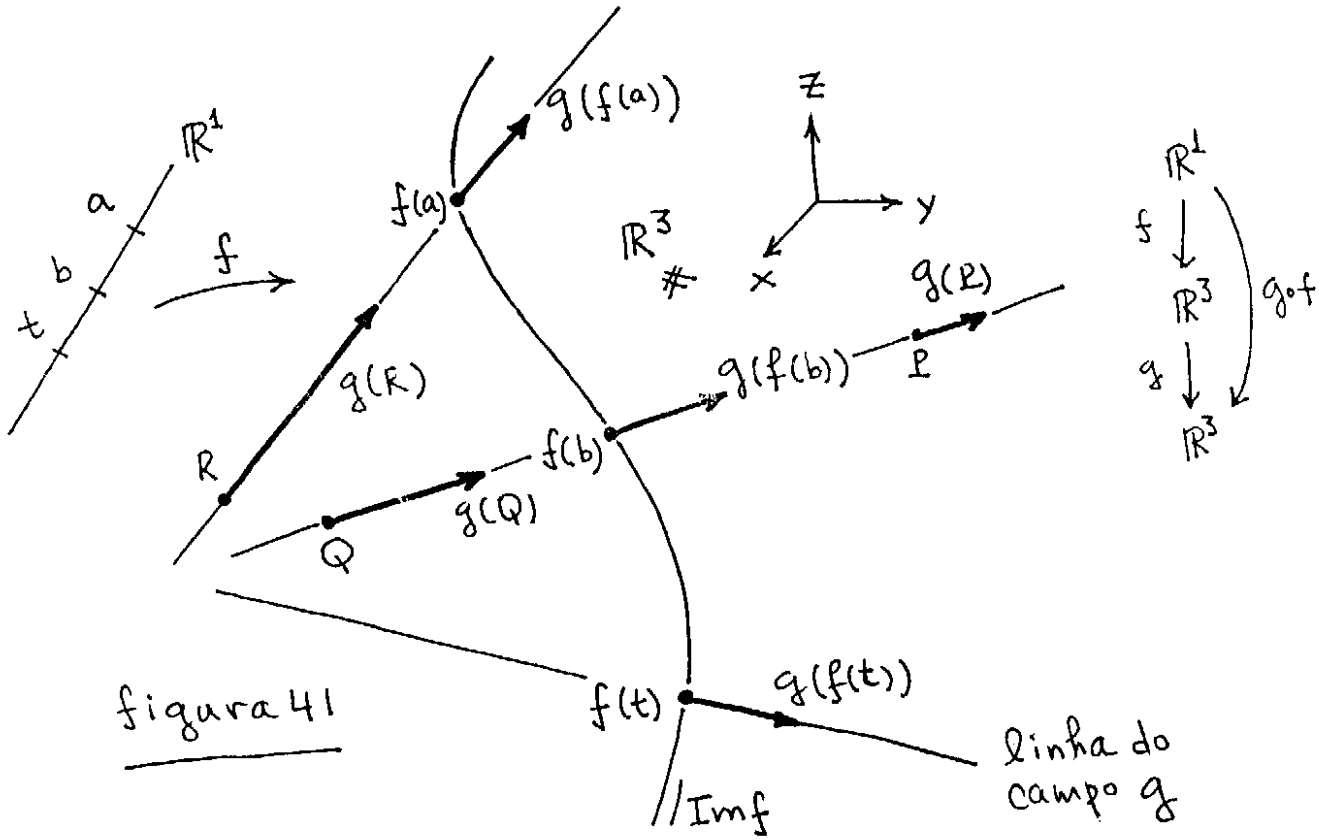


figura 41

Consideremos por exemplo uma curva parametrizada $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ representando o movimento de uma partícula no $\mathbb{R}^3$. Então $t \in \mathbb{R}^1$ é um dado instante e $f(t) \in \mathbb{R}^3$ é a posição da partícula nesse instante.

Supomos ainda mais que $Imf \subseteq D_g$, e a partícula se move dentro do domínio de um campo de forças $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (xyz) \mapsto g(xyz) \in \mathbb{R}^3$, que age sobre a mesma.

Então a composta $g \circ f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g \circ f(t) = g(f(t)) = g(x(t), y(t), z(t))$ associa cada instante $t \in \mathbb{R}^1$ à força $g(f(t))$ agindo na partícula naquele instante (quando a mesma ocupa a oposição $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$).

Se a partícula é um elétron que percorre a hélice $t \mapsto f(t) = (R\cos wt, R\text{sen}wt, vt)$ de raio $R > 0$ e passo $p = \dfrac{2\pi v}{w}$ (v e w são constantes correspondentes respectivamente à componente da velocidade da partícula na direção z, e à frequência angular com que a partícula gira em torno do eixo z). E o campo ao qual tal elétron está submetido é aquele gerado por um próton, suposto fixo na origem de $\mathbb{R}^3$, dado por

$$(xyz) \mapsto \left(\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) = g(xyz).$$

Então $g \circ f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3, g \circ f(t) = g(f(t)) = g(R\cos wt, R\text{sen}wt, vt) =$

$$= \left(\frac{kR\cos wt}{(R^2+v^2t^2)^{3/2}}, \frac{kR\text{sen}wt}{(R^2+v^2t^2)^{3/2}}, \frac{kvt}{(R^2+v^2t^2)^{3/2}} \right)$$

dá a força exercida pelo próton sobre o elétron no instante t.

Tais composições de curvas parametrizadas com campos vetoriais, serão importantes no 4º livro do nosso curso, quando estudaremos as integrais de linha. As integrais de linha irão calcular a energia recebida de, ou cedida a, um campo de forças. Por uma partícula que transita no domínio de tal campo, e sofre sua ação.

Além de sua importância evidente em Física, as integrais de linha serão um importante instrumento da Matemática para o estudo dos campos vetoriais. O cálculo de integrais de linha ao longo de várias curvas contidas no domínio de um campo vetorial trará informações importantes a respeito do campo em questão.

Para dar uma idéia do que está por vir, notamos que se um campo de forças tem linhas de forças circulares como o campo magnético da figura 11, ocorrem dois fatos:

(i) uma partícula sob a ação de tal campo de forças ganharia energia indo do ponto inicial $P_i = (1,0)$ ao ponto final $P_f = (-1,0)$ pela curva $t \mapsto (\cos t, \text{sen}t)$ com t entre o e π (convença-se disso observando a figura 11). Essa curva seria a semicircunferência unitária no sentido anti-horário.

(ii) tal partícula perderia energia (convença-se) indo de P_i até P_f pela curva $t \mapsto (\cos t, -\text{sen}t)$ com t entre 0 e π. Isso é, pela semicircunferência unitária percorrida no sentido horário.

No 4º livro relacionamos a dependência da energia cedida pelo campo à partícula com o caminho que liga dois pontos dados à existência de "redemoinhos" ou de linhas circulares no campo.

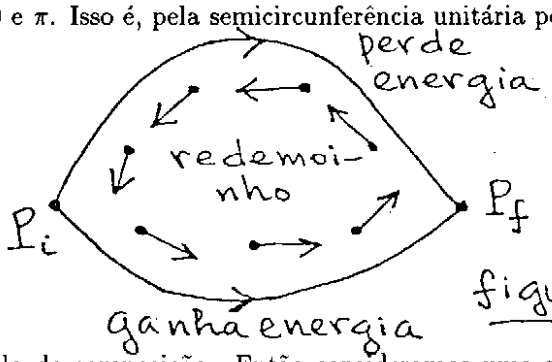


figura 42

Vamos a outro exemplo de composição. Então consideramos uma superfície $S = Imf$ parametrizada por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto f(s,t)$. E também um campo vetorial $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S = Imf \subseteq D_g$. Podemos definir a composta $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que associa cada par de parâmetros (s,t) ao valor $g(f(s,t))$ do campo vetorial no ponto $f(s,t)$ da superfície.

Tal composta descreve os valores vetoriais do campo ao longo da superfície (vide figura 43).

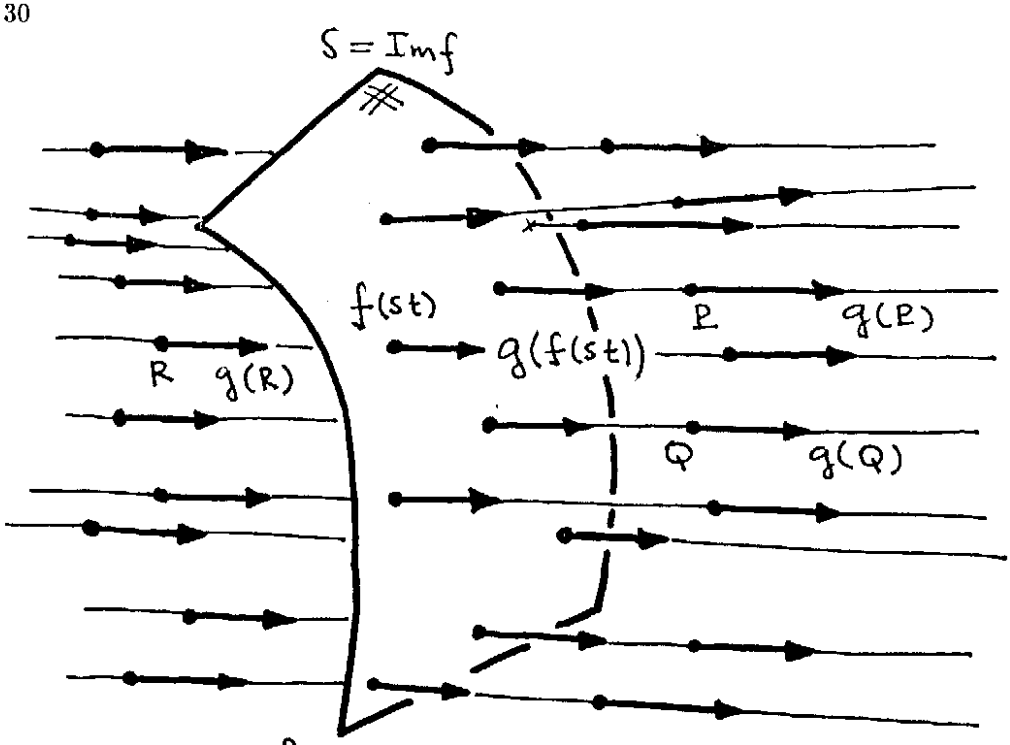


figura 43

Se a superfície é a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ a menos dos polos norte e sul, $N=(0,0,1)$ e $S=(0,0,-1)$. Cuja parametrização é dada por $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $D_f=\{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $0<\theta<\pi\}$ e $f(\theta,\varphi)=(R\text{sen}\theta\cos\varphi, R\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, R\cos\theta)$. E se $g:\mathbb{R}^3-$ eixo $z\to\mathbb{R}^3$ é o campo magnético dado por uma corrente constante ao longo do eixo $z, g(xyz)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$. Então a composta $g\circ f: D_f\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ é dada por

$$g\circ f(\theta,\varphi)=g(f(\theta,\varphi))=g(R\text{sen}\theta\cos\varphi, R\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, R\cos\theta)=$$

$$=\left(\frac{-\cos\varphi}{R\text{sen}\theta},\frac{\text{sen}\varphi}{R\text{sen}\theta},0\right)$$

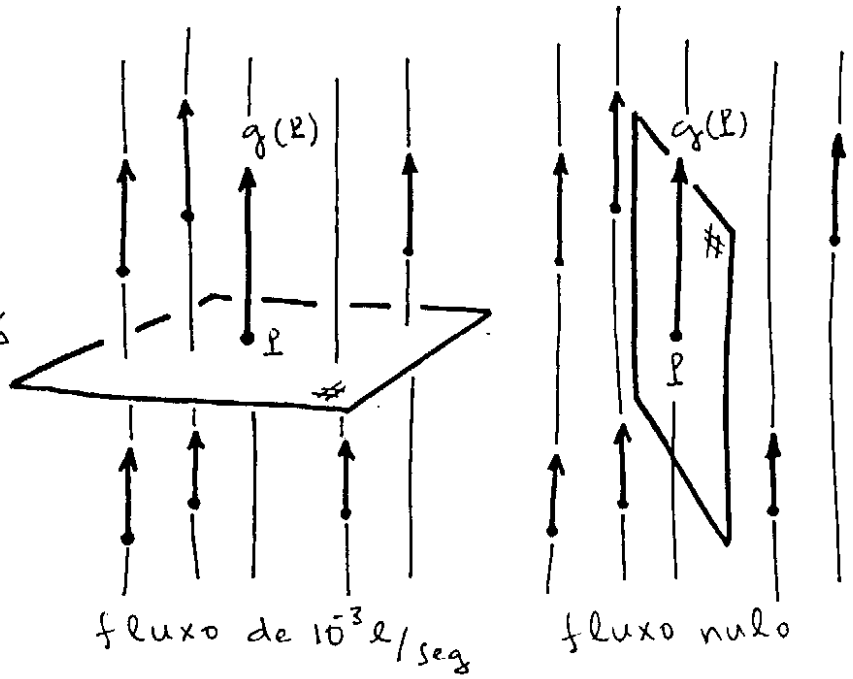
expressão que descreve o campo magnético ao longo da esfera sem os polos em função dos ângulos azimutal e equatorial (tiramos os polos da esfera para que $Imf\subseteq D_g$).

As composições de campos vetoriais com superfícies serão úteis no 5º livro de nosso curso quando estudaremos as integrais de superfície. Tais integrais calcularão o fluxo, em litros por segundo (l/seg), de um fluido através de uma superfície. Nesse contexto o fluido é representado por um campo vetorial $g: D_g\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ chamado vazão vetorial. Para cada ponto $P\in D_g, g(P)$ é um vetor com direção e sentido dados pelo movimento do fluido. E cujo módulo, $||g(P)||$, é medido em litros por segundo por metro quadrado ($l/seg.m^2$). E de forma que se $||g(P)||=10$ litros/seg.m^2, teríamos um fluxo de um mililitro por segundo ($10^{-3}l/seg$) num

quadradinho de $1cm \times 1cm$ colocado no ponto P, ortogonalmente a $g(P)$. Teríamos porém um fluxo nulo em tal quadrado se o mesmo fosse girado de forma a ficar paralelo ao movimento do fluido (vide figura 44)

figura 44

fluxos através de quadradinhos



Além de serem naturalmente interessantes para a Física, as integrais de superfície (que calculam fluxos através de superfícies) serão também uma ferramenta matemática importante no estudo das propriedades dos campos vetoriais.

Sempre podemos supor que um campo vetorial dado representa a vazão de um fluido imaginário e questionar qual o seu fluxo em uma dada superfície. Na figura 45 tentamos mostrar como o cálculo de fluxos de um campo vetorial dado ao longo de superfícies que tenham uma mesma fronteria, nos permitirá avaliar existência de fontes e/ou sorvedouros do fluido associado ao campo.

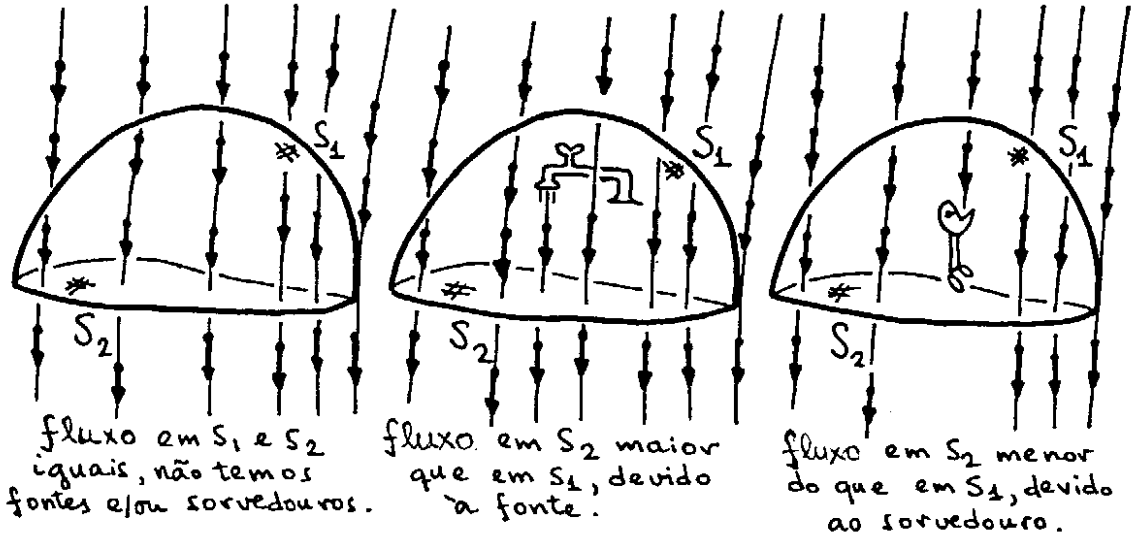


Figura 45

Tais fontes e/ou sorvedouros do fluido associado ao campo correspondem ao aparecimento ou desaparecimento de linhas do campo (no ponto concernente). Quando não existem fontes e sorvedouros, as linhas do campo são contínuas. No 5º livro de nosso curso precisaremos melhor essas idéias. No 6º livro trataremos da ligação entre integrais de linha e superfície.

Finalmente notamos que é importante a composição de um campo escalar $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1, (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, com um sistema de coordenadas $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (u,v,w) \mapsto f(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Definimos a composta $\overline{g} = g \circ f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ por $\overline{g}(u,v,w) = g(f(u,v,w)) = g(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$. Tal $\overline{g}$ representa a mesma grandeza que g, mas em termos das coordenadas (u,v,w) ao invés de (x,y,z).

Embora $\overline{g}$ contenha a mesma informação dada em g, pode ter forma funcional muito mais simples. É o que ocorre quando

$$g : \mathbb{R}^3 - \text{ origem } \to \mathbb{R}^1, \quad g(x,y,z) = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

é o potencial de uma carga pontual na origem, e $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r\theta\varphi) = (r\text{sen}\theta\cos\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\theta)$ com $D_f = \{(r\theta\varphi) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } r > 0 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}$, é o sistema esférico (com $r \neq 0$ para que $Imf = D_g$). Temos

$$\begin{aligned} \overline{g}(r\theta\varphi) &= g(r\text{sen}\theta\cos\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\theta) = \\ &= \frac{k}{((r\text{sen}\theta\cos\varphi)^2 + (r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2)^{1/2}} = \frac{k}{r} \end{aligned}$$

e $\overline{g}$ depende apenas da coordenada radial. O fato de g ter simetria esférica faz com que $\overline{g}$ tenha uma forma simples no sistema de coordenadas esféricas. Definiremos melhor simetria esférica de um campo escalar no livro 9.

Bom, vamos aos exercícios

Ex. 1 Considere o vôo da mosca da figura 46 parametrizado por $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3, f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Faça um esbôço do gráfico de x em função de t, o mesmo para y e z. Coloque os gráficos um sob o outro de forma que instantes iguais fiquem na mesma vertical.

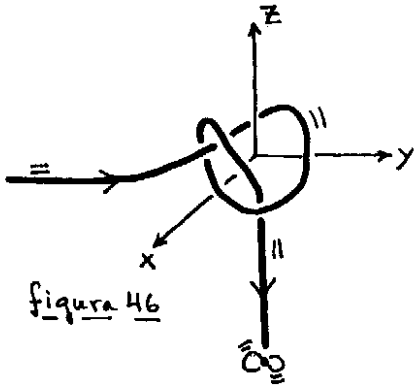


figura 46

Ex. 2 Uma bicicleta percorre o eixo y com velocidade constante, também é constante a frequência angular com que o ciclista pedala. Suponha que o plano de simetria da bicicleta coincide com o plano yz. Defina as constantes necessárias e dê as equações paramétricas de um ponto do pedal da bicicleta.

Ex. 3 Curvas no $\mathbb{R}^2$ dadas por $t \to (A\cos w_1 t, B\text{sen} w_2 t)$ são exemplos de figuras de Lissajous. Para $w_1 = w_2$ mostre que tais curvas são circunferências ou elipses. Para $A = B = 1, w_2 = nw_1$ e $n \in \mathbb{Z}$, mostre que são gráficos de polinômios (chamados polinômios de Chebichev). Para $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$ (racional) mostre que são curvas fechadas. Ache a equação para $w_2/w_1 = 2/3$.

Ex. 4 Seja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva. Explique porque o gráfico de f, G_f, é uma curva no $\mathbb{R}^3$. Qual o gráfico da circunferência $\{(xy) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = \cos t, y = \text{sen} t, t \in \mathbb{R}\}$? A curva do pedal, no exercício 2, pode ser considerada como uma curva no $\mathbb{R}^2$. Qual o gráfico dessa curva?

Ex. 5 Considere agora $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(xyz) = (g_1(xyz), g_2(xyz))$.
(a) quando $g_1(xyz) = x^2 + y^2$ e $g_2(xyz) = z^2 - x^2 - y^2$, estude os possíveis conjuntos de nível de g.
(b) caracterize a reta $t \mapsto (2t, t-1, t)$ como o conjunto de nível de uma tal g.

Ex. 6 Faça o diagrama de campo para os seguintes campos vetoriais, e trace suas linhas de campo:
(a) $f : \mathbb{R}^2 - \{(-1,0),(1,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(xy) = (f_1(xy), f_2(xy))$ com

$$f_1(x,y) = \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$$

e

$$f_2(x,y) = \frac{(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}.$$

(b) $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,-1),(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
f(xyz) &= (f_1(xyz), f_2(xyz), f_3(xyz)) \text{ com} \\
f_1(x,y,z) &= \frac{x}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{3/2}} + \frac{(-x)}{(x^2+y^2+(z+1)^2)^{3/2}} \\
f_2(x,y,z) &= \frac{y}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{3/2}} + \frac{(-y)}{(x^2+y^2+(z+1)^2)^{3/2}} \\
f_3(x,y,z) &= \frac{(z-1)}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{3/2}} + \frac{(-z-1)}{(x^2+y^2+(z+1)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Interprete fisicamente os dois campos dados

Ex. 7 Como você acha que deve ser a parametrização da folha de papel que enrolamos ao lado?

Especifique para o caso em que o número de voltas é proporcional à distância ao eixo z.

Encontre os "paralelos e meridianos" associados à parametrização.

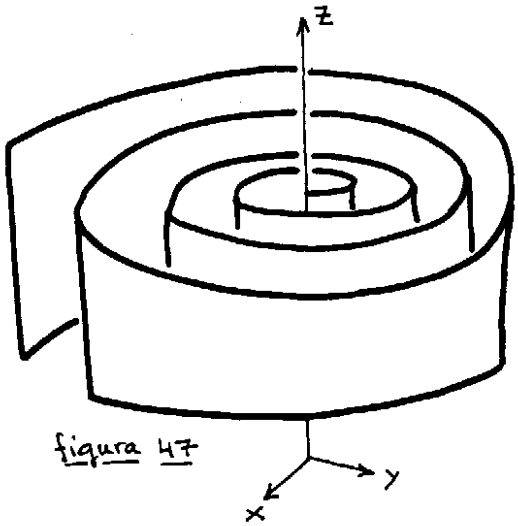


figura 47

Ex. 8

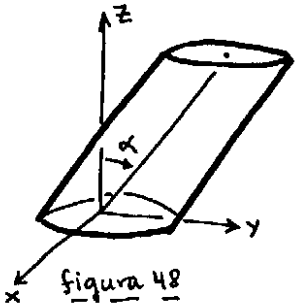


figura 48

A torre de Pisa parece um cilindro, mas faz um ângulo α com o eixo z (fig 1.30). Parametrize a torre de Pisa e ache sua equação (i.e., caracterize-a como uma superfície de nível). Sugestão: *movimento*

Observação Sobre Funções Hiperbólicas

Seja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, definimos as partes par e ímpar de $f; f_p, f_i : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$; por

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

de forma que $f_p(x) = f_p(-x), f_i(-x) = -f_i(x)$ e $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.

As partes par e ímpar da função exponencial são chamadas de cosseno hiperbólico e seno hiperbólico respectivamente. E denotados por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

O cosseno hiperbólico é sempre maior ou igual a 1 e atinge esse valor em $x = 0$, essa função par tende assintóticamente para $e^x/2$ quando $x \to \infty$ e para $e^{-x}/2$ quando $x \to -\infty$.

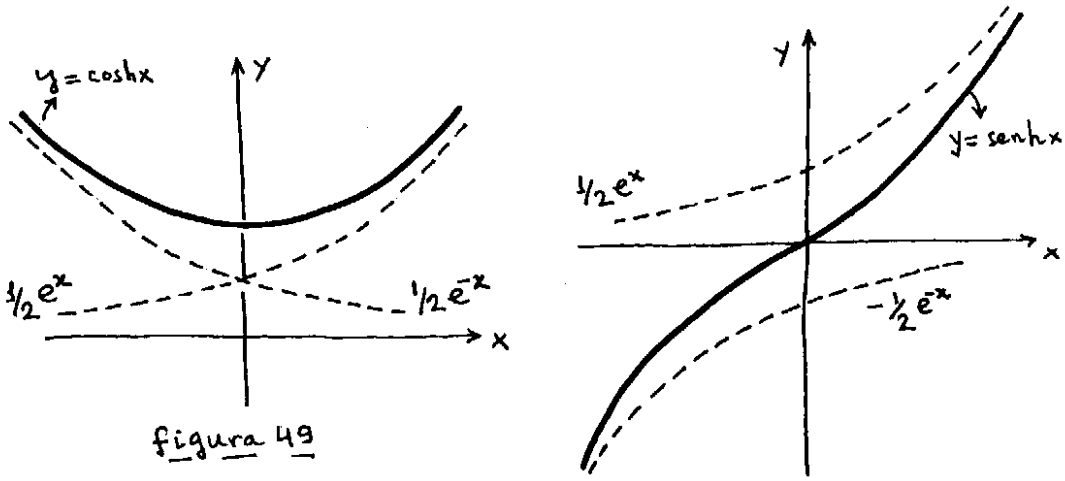


Figura 49

O seno hiperbólico vai de $-\infty$ a $+\infty$ passando pela origem em $x = 0$. Essa função ímpar tende assintoticamente a $-e^{-x}/2$ quando $x \to -\infty$ e a $e^x/2$ quando $x \to \infty$.

Temos que $\dfrac{d\cosh x}{dx} = \text{senh}x, \dfrac{d\text{senh}x}{dx} = \cosh x$. E a relação $(\cosh\varphi)^2 - (\text{senh}\varphi)^2 = 1$ permite que parametrizemos um dos arcos da hipérbole unitária dado

por $\{(xy) \in I\!R^2$ t.q. $x^2 - y^2 = 1, x \geq 0\}$ através de $\varphi \mapsto (\cosh\varphi, \text{senh}\varphi)$ com φ indo de $-\infty$ a $+\infty$.

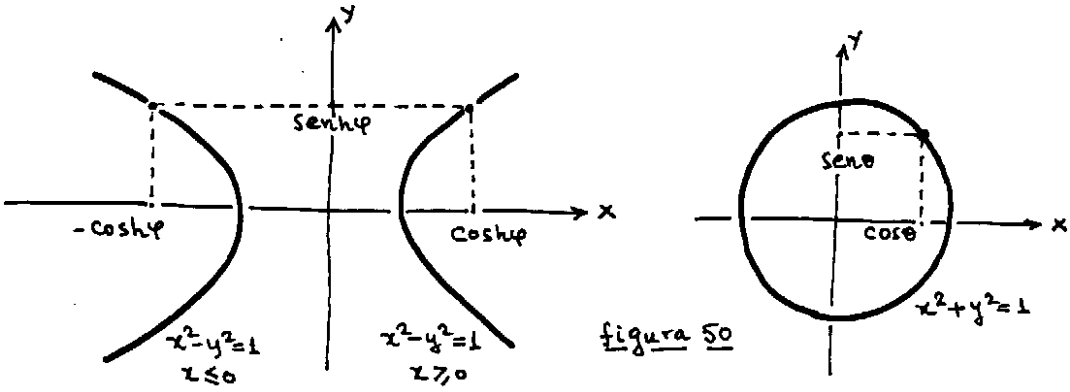


figura 50

O outro arco pode ser parametrizado por $\varphi \mapsto (-\cosh\varphi, \text{senh}\varphi)$. Analogamente ao fato do seno e cosseno usuais serem as coordenadas da circunferência unitária, os hiperbólicos são da hipérbole unitária. O "ângulo" φ é chamado de ângulo hiperbólico, e vai de $-\infty$ a $+\infty$.

Também temos as fórmulas de adição

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \text{senh}\alpha\text{senh}\beta$$
$$\text{senh}(\alpha + \beta) = \text{senh}\alpha\cosh\beta + \text{senh}\beta\cosh\alpha,$$

e definimos tangente hiperbólica por $tgh\varphi = \dfrac{\text{senh}\varphi}{\cosh\varphi}$, etc...

Você já devia conhecer *muito bem* tais funções hiperbólicas do seu primeiro curso de Cálculo, se não as conhece sugerimos a leitura *urgente* do capítulo concernente do vol. 1 do texto "Cálculo com Geometria Analítica" de L. Leithold (tradução de Antonio e Otília Paques, Sebastião A. J. Filho, Editora Harper & Row, 1977).

Se você tem algum conhecimento de Relatividade Especial sugerimos o artigo de Fjelstad (American Journal of Physics, **54** (5), 1986) para aplicações de funções hiperbólicas em Relatividade especial.

As funções hiperbólicas nos serão úteis para a parametrização de curvas, superfícies e regiões associadas à hipérbole. Findada a observação, voltamos aos exercícios.

Ex. 9 Considere a hipérbole $\{(xyz) \in I\!R^3$ t.q. $x^2 - y^2 = 1$ e $z = 0\}$. Caracterize como superfícies de nível as superfícies geradas por essa hipérbole através de revolução

(a) em torno do eixo x

(b) em torno do eixo y

Parametrize essas superfícies e estude seus "paralelos e meridianos".

Ex. 10 Encontre uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\theta\varphi) = (x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$ que leva o quadrado $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ sobre o toro de raios r e R ao lado. Caracterize o toro como superfície de nível de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$. Verifique que o toro pode ser pensado como o quadrado Q com os lados opostos identificados. Transporte as figuras de Lissajous (exercício 3) com frequências inteiras ($w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$) do plano (θ, φ) para o toro. Obtenha assim parametrizações de espirais circulares no $\mathbb{R}^3$.

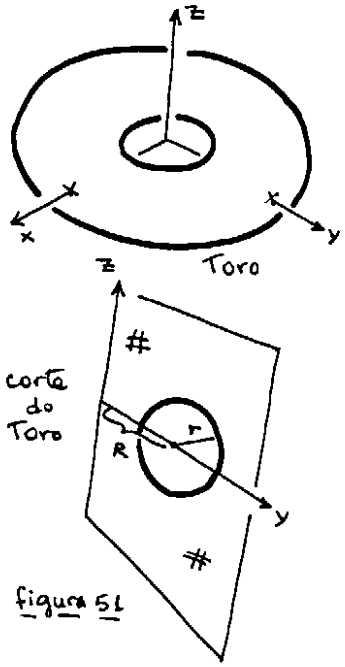


figura 51

Ex. 11 Obtenha as curvas e superfícies coordenadas para o sistema parabólico cilíndrico, dado por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com

$$f(\alpha,\beta,z) = (\underbrace{\alpha^2 - \beta^2}_{x(\alpha,\beta,z)}, \underbrace{2\alpha\beta}_{y(\alpha,\beta,z)}, \underbrace{z}_{z(\alpha,\beta,z)})$$

e $\quad D_f = \{(\alpha,\beta,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \beta \geq 0\}$.

Ex. 12 O mesmo para o sistema parabólico de revolução dado por $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(\xi,\eta,\varphi) = (\underbrace{\eta\cos\varphi}_{x(\xi,\eta,\varphi)}, \underbrace{\xi\,\mathrm{sen}\varphi}_{y(\xi,\eta,\varphi)}, \underbrace{\frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)}_{z(\xi,\eta,\varphi)})$$

com $D_f = \{(\xi,\eta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \xi \geq 0, \eta \geq 0\}$. Ache a função de transição entre o sistema parabólico cilíndrico e o de revolução. Isto é, encontre $h(\xi,\eta,\varphi) = (\alpha(\xi,\eta,\varphi), \beta(\xi,\eta,\varphi), z(\xi,\eta,\varphi))$ tal que $f_{rev}(\xi,\eta,\varphi) = f_{cil}(h(\xi,\eta,\varphi))$.

Ex. 13 Seja A um conjunto. Uma relação em A é dada por um subconjunto do produto cartesiano de A por A, $R \subseteq A \times A$. Dados $x, y \in A$ dizemos que x e y estão relacionados e escrevemos xRy quando $(x,y) \in R$. Uma relação é dita "relação de equivalência quando é

(a) reflexiva, i.e., $xRx\ \forall x \in A$.

(b) simétrica, i.e., $xRy \Rightarrow yRx$.

(c) transitiva, i.e., xRy e $yRz \Rightarrow xRz$

Tendo definido uma relação de equivalência em A, definimos para cada $x \in A$ um subconjunto de A, $[x] \subseteq A$, chamado "classe de equivalência de x", por

$$[x] = \{y \in A \quad \text{t.q.} \quad yRx\}$$

Mostre que dadas duas classes de equivalência $[x]$ e $[y]$ em A, temos exclusivamente que $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \phi$. Ou são idênticas ou são disjuntas. E que portanto A é uma união de classes de equivalências disjuntas entre si.

Tome agora $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, também chamado de conjunto das partes de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a congruência definida no "Exemplo 5" é uma relação de equivalência em A. E que portanto divide o conjunto de todos os possíveis subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ em classes de equivalência disjuntas entre si. Estando em cada classe uma família de subconjuntos congruentes entre si.

O conceito de classes de equivalência aparecerá novamente em nosso curso e é importante em Matemática. Sugerimos que o estudante consulte o vol.1 do texto "Matemática Clássica" de Griffits e Hilton (tradução de E. F. Gomide, Edgard Blücher, 1975).

Ex. 14 Mostre que uma rotação de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ em torno da direção $\vec{n}(||\vec{n}|| = 1)$ por um ângulo α pode ser escrita como:

$$R_{\vec{n},\alpha}(\vec{v}) = (\vec{v}.\vec{n})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{v}) \times \vec{n}\cos\alpha + (\vec{n} \times \vec{v})\text{sen}\alpha$$

onde denotamos por $\vec{u}.\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ os produtos internos e vetorial de $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Interprete geometricamente as três parcelas à direita da expressão acima.

Ex. 15 Encontre você mesmo alguns sistemas de coordenadas. Escolha $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ tal que um paralelepípedo tem como imagem:

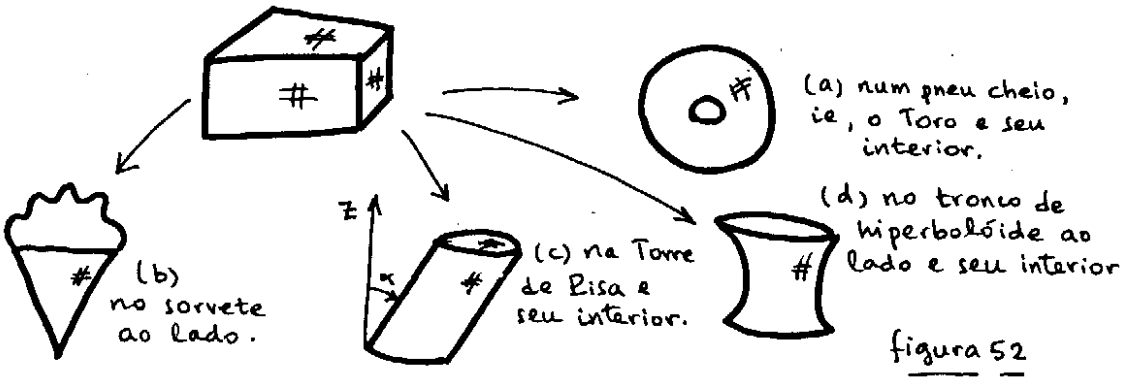


figura 52