17. $r = 4 + 2\,\text{sen}\,\theta$ **18.** $r = 6 + 2\cos\theta$
19. $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$ **20.** $r = 4\,\text{sen}\,5\theta$ **21.** $r = 2\cos 4\theta$
22. $r = 3\cos 2\theta$ **23.** $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$ **24.** $r = 3\cos 3\theta$
25. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)
26. $r = e^{\theta/3}$ (espiral logarítmica)
27. $r = \dfrac{1}{\theta}$ (espiral recíproca)
28. $r = 2\theta$ (espiral de Arquimedes)
29. $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)
30. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (lemniscata)
31. $r^2 = -25\cos 2\theta$ (lemniscata)
32. $r^2 = -4\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)
33. $r = 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{tg}\,\theta$ (cissóide)
34. $r = 2\sec\theta - 1$ (concóide de Nicomedes)
35. $r = |\text{sen}\,2\theta|$
36. $r = 2|\cos\theta|$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas. Faça um esboço de cada par de gráficos com o mesmo eixo polar e a mesma origem.

37. $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 3\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$

39. $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} r = 2\cos 2\theta \\ r = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

41. $\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} r\,\text{sen}\,\theta = 4 \\ r\cos\theta = 4 \end{cases}$

43. $\begin{cases} r = \text{tg}\,\theta \\ r = 4\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

45. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos\theta) \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} r = \text{sen}\,\theta \\ r = \text{sen}\,2\theta \end{cases}$

47. $\begin{cases} r^2\,\text{sen}\,2\theta = 8 \\ r\cos\theta = 2 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} r = 4(1 + \text{sen}\,\theta) \\ r(1 - \text{sen}\,\theta) = 3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} r = \cos\theta - 1 \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ **50.** $\begin{cases} r = 1 - \text{sen}\,\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

51. $\begin{cases} r = \text{sen}\,2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} r = 4\,\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$

53. Prove o Teorema 10.6.2. **54.** Prove o Teorema 10.6.3.

Nos Exercícios 55 e 56, o gráfico da equação dada intercepta a si mesmo. Ache os pontos nos quais isso ocorre.

55. $r = \text{sen}\,\frac{3}{2}\theta$ **56.** $r = 1 + 2\cos 2\theta$

10.7 ÁREA DE UMA REGIÃO EM COORDENADAS POLARES

Vamos desenvolver agora um método para encontrar a área de uma região limitada por duas retas que passam pela origem e por uma curva cuja equação seja dada em coordenadas polares.

Seja f uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Seja R a região limitada pela curva cuja equação é $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Então, R é a região AOB da Figura 1.

Consideremos uma partição Δ de $[\alpha, \beta]$ definida por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

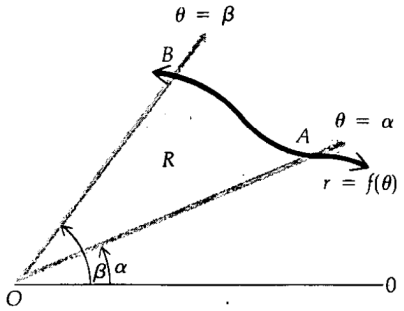

FIGURA 1

Temos, portanto, n subintervalos da forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, onde $i = 1, 2 \ldots, n$. Seja ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Veja a Figura 2, onde o i-ésimo subintervalo é mostrado junto com $\theta = \xi_i$. A medida em radianos do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ será denotada por $\Delta_i\theta$. O número de unidades de área na área do setor circular de raio $f(\xi_i)$ unidades e ângulo central com $\Delta_i\theta$ rad é dado por

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta$$

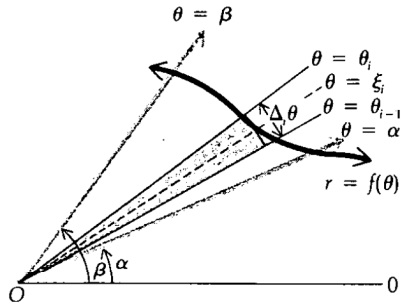

FIGURA 2

Há um desses setores circulares para cada um dos n subintervalos. A soma das medidas das áreas desses n setores circulares é

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_1)]^2\,\Delta_1\theta + \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2\,\Delta_2\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_n)]^2\,\Delta_n\theta$$

que, usando somatória, pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2\,\Delta_2\theta \qquad (1)$$

Seja $\|\Delta\|$ a norma da partição Δ; isto é, $\|\Delta\|$ é a medida do maior $\Delta_i\theta$. Então, se A unidades de área for a área da região R, definimos A como o limite da soma de Riemann (1) quando $\|\Delta\|$ tende a zero, que é uma integral definida.

10.7.1 DEFINIÇÃO Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e a curva cuja equação é $r = f(\theta)$, onde f é contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha\ \beta]$. Então, se A unidades de área for a área da região R,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\, \Delta_i\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta$$

EXEMPLO 1 Ache a área da região limitada pelo gráfico de

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

Solução A região, bem como um elemento de área, estão na Figura 3. Como a curva é simétrica em relação ao eixo polar, tomamos os limites de θ de 0 até π, o que determina a área da região limitada pela curva acima do eixo polar. Então, para determinar a área de toda a região, basta multiplicá-la por 2. Assim, se A unidades de área for a área pedida,

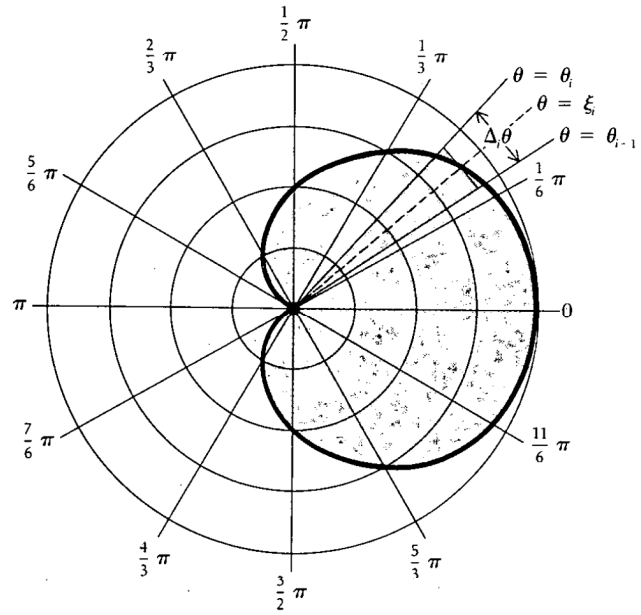

FIGURA 3

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos \xi_i)^2 \, \Delta_i\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\
&= 4\Big[\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big]_0^{\pi} \\
&= 4(\pi + 0 + \tfrac{1}{2}\pi + 0 - 0) \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

Logo, a área é 6π unidades de área.

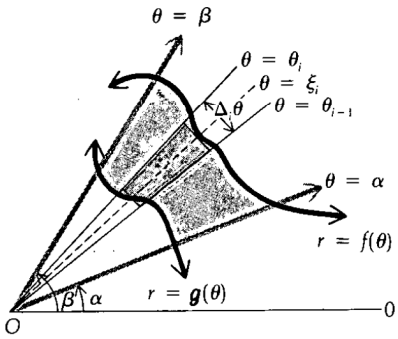

FIGURA 4

Consideremos agora a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas curvas cujas equações são $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, onde f e g são contínuas no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ e $f(\theta) \geqslant g(\theta)$ em $[\alpha, \beta]$. Veja a Figura 4. Queremos encontrar a área dessa região. Consideremos uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, sendo ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. A medida da área de um elemento de área é a diferença das medidas das áreas de dois setores circulares:

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta - \tfrac{1}{2}[g(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta = \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

A soma das medidas das áreas de n de tais elementos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

Assim, se A unidades de área for a área da região desejada, teremos

$$\boxed{A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta}$$

Como f e g são contínuas em $[\alpha, \beta]$, também $f - g$ será contínua; logo, existirá o limite e será igual a uma integral definida. Assim,

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) \, d\theta}$$

EXEMPLO 2 Ache a área da região interior à circunferência $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ e exterior à *limaçon* $r = 2 - \mathrm{sen}\,\theta$.

Solução Para encontrar os pontos de intersecção tomamos

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{sen}\,\theta &= 2 - \mathrm{sen}\,\theta \\
\mathrm{sen}\,\theta &= \tfrac{1}{2} \\
\theta &= \tfrac{1}{6}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{6}\pi
\end{aligned}
$$

As curvas e a região são mostradas na Figura 5, bem como um elemento de área.

Seja $f(\theta) = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $g(\theta) = 2 - \mathrm{sen}\,\theta$, então, a equação da circunferência será $r = f(\theta)$, enquanto que a da *limaçon* será $r = g(\theta)$.

Em vez de tomar os extremos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, usaremos as propriedades de simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e tomaremos os extremos de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}$; então multiplicaremos o resultado por 2.

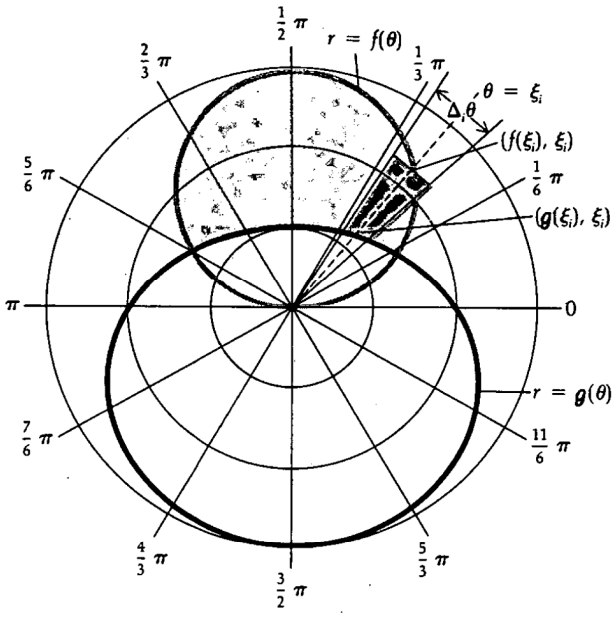

FIGURA 5

Logo, se A unidades de área for a área da região dada,

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i\theta \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\,d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} [9 \operatorname{sen}^2\theta - (2 - \operatorname{sen}\theta)^2]\,d\theta \\
&= 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta - 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
&= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta + \Big[-4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= 4\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= -2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= (-2\operatorname{sen}\pi - 4\cos\tfrac{1}{2}\pi) - (-2\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi - 4\cos\tfrac{1}{6}\pi) \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Logo, a área é $3\sqrt{3}$ unidades de área.

EXERCÍCIOS 10.7

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a área da região limitada pelo gráfico da equação dada.

1. $r = 3\cos\theta$
2. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$
3. $r = 4\cos 3\theta$
4. $r = 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$
5. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$
6. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$
7. Ache a área da região limitada pelo gráfico da equação $r = \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
8. Ache a área da região limitada pelo gráfico de $r = e^\theta$ e pelas retas $\theta = 0$ e $\theta = 1$.

Nos Exercícios de 9 a 12, ache a área da região limitada por um laço do gráfico da equação dada.

9. $r = 3\cos 2\theta$ **10.** $r = a(1 - 2\cos\theta)$

11. $r = 1 + 3\,\text{sen}\,\theta$ **12.** $r = a\,\text{sen}\,3\theta$

Nos Exercícios de 13 a 16, ache a área de intersecção das regiões limitadas pelos gráficos das duas equações dadas.

13. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2\cos\theta \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} r = 4\,\text{sen}\,\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$

15. $\begin{cases} r = 3\,\text{sen}\,2\theta \\ r = 3\cos 2\theta \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} r^2 = 2\cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

Nos Exercícios de 15 a 21, ache a área da região que está no interior da região limitada pelo gráfico da primeira equação e no exterior da região limitada pelo gráfico da segunda equação.

17. $\begin{cases} r = a \\ r = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$

19. $\begin{cases} r = 2\,\text{sen}\,\theta \\ r = \text{sen}\,\theta + \cos\theta \end{cases}$

20. $\begin{cases} r = 2a\,\text{sen}\,\theta \\ r = a \end{cases}$

21. $\begin{cases} r = a(1 + \cos\theta) \\ r = 2a\cos\theta \end{cases}$

22. Determine o valor de a para o qual a região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$ tem uma área de 9π unidades de área.

23. Numa armação de óculos o tamanho das lentes é dado pela região limitada pelo gráfico da equação $r^2 = 4\cos 2\theta$. Quanto material é necessário para cobrir a região?

24. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral $r = a\theta$ durante sua segunda revolução, que não foi varrida em sua primeira revolução.

25. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da curva do Exercício 24 durante sua terceira revolução, que não foi varrida durante sua segunda revolução.

10.8 UM TRATAMENTO UNIFICADO DE SECÇÕES CÔNICAS E EQUAÇÕES POLARES DAS CÔNICAS

Nas Secções 10.1 até 10.3 definimos cada um dos três tipos de secções cônicas separadamente. Uma abordagem alternativa é começar com uma definição que dê as propriedades comuns das cônicas e então introduzir cada cônica como um caso particular da definição geral. Vamos estabelecer essa definição no teorema a seguir. A constante positiva e no enunciado do teorema é chamada **excentricidade** da cônica.

10.8.1 TEOREMA

> Uma secção cônica pode ser definida como o conjunto dos pontos P no plano, tal que a razão entre a distância não orientada de P a um ponto fixo e a distância não orientada de P a uma reta fixa que não contenha o ponto fixo seja uma constante positiva e. Além disso, se $e = 1$, a cônica será uma parábola; se $0 < e < 1$, ela será uma elipse e se $e > 1$, ela será uma hipérbole.

Prova Se $e = 1$, vemos, comparando a Definição 10.1.1 e o enunciado do teorema, que o conjunto é uma parábola tendo como ponto fixo seu foco e como reta fixa sua diretriz.

Suponha agora que $e \neq 1$. Primeiro vamos obter uma equação polar do conjunto de pontos descrito. Seja F o ponto fixo e l a reta fixa. Vamos tomar F como a origem e o eixo polar, bem como sua extensão, perpendicular a l. Vamos considerar primeiro a situação em que a reta l está à esquerda do ponto F. Seja D o ponto de intersecção de l com a extensão do eixo polar e d a distância não orientada de F a l. Consulte a Figura 1. Seja $P(r, \theta)$ qualquer ponto do conjunto à direita de l e sobre o lado terminal do ângulo de medida θ. Trace, perpendicularmente ao eixo polar e à reta l, PQ e PR respectivamente. O ponto P estará no conjunto descrito se e somente se

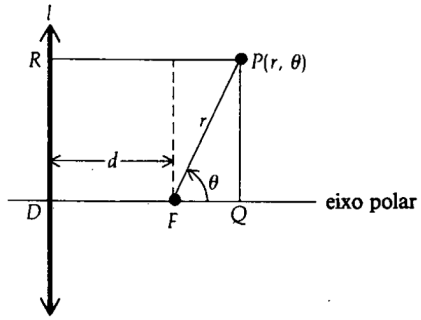

FIGURA 1

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \tag{1}$$

Como P está à direita de l, $\overline{RP} > 0$; assim $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Além disso, $|\overline{FP}| = r$ pois $r > 0$. Assim de (1),

$$r = e(\overline{RP}) \tag{2}$$