15.7 Integração em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Seja $f(x, y)$ uma função contínua definida em uma região z simples T que — por ser z simples — pode ser descrita como

$$z_1(x, y) \leqq z \leqq z_2(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ em } R$$

(onde R é a projeção de T no plano xy, como de costume). Viu-se na Seção 15.6 que

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dA. \tag{1}$$

Se for possível descrever a região R em coordenadas polares, de maneira mais natural do que em coordenadas retangulares, então é provável que a integração sobre a região plana R seja mais simples se efetuada em coordenadas polares.

Primeiro expressa-se a integral parcial interior da Eq. (1) em termos de r e θ, escrevendo-se

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz = \int_{Z_1(r,\theta)}^{Z_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, dz, \tag{2}$$

onde

$$F(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) \tag{3a}$$

e

$$Z_i(r, \theta) = z_i(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \tag{3b}$$

para $i = 1, 2$. Substituindo-se a Eq. (2) na Eq. (1) com (**importante**) $dA = r\, dr\, d\theta$, tem-se

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iint_S \left(\int_{Z_1(r,\theta)}^{Z_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, dz \right) r\, dr\, d\theta, \tag{4}$$

onde F, Z_1 e Z_2 são as funções dadas em (3) e S representa os limites de r e θ apropriados para descrever a região plana R em coordenadas polares (conforme discutido na Seção 15.4). Os limites de z são simplesmente as coordenadas z (em termos de r e θ) de um segmento retilíneo genérico unindo as superfícies fronteira inferior e superior de T, conforme indicado na Fig. 15.7.1.

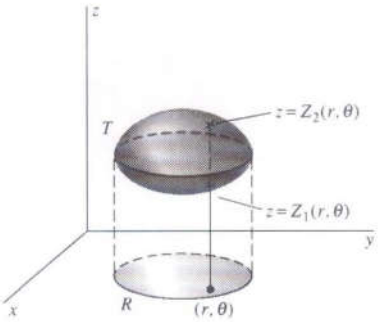

Fig. 15.7.1 Os limites de z em uma integral tripla em coordenadas cilíndricas são determinados pelas superfícies inferior e superior.

Assim, a fórmula geral para **integração tripla em coordenadas cilíndricas** é

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \iiint_U f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta, \tag{5}$$

onde U não é uma região no espaço, mas — como na Seção 15.4 — uma representação dos limites de z, r e θ adequados para descrever, em coordenadas cilíndricas, a região T do espaço. Antes de integrar, devem-se substituir as variáveis x e y por $r \cos \theta$ e $r \operatorname{sen} \theta$, respectivamente; z permanece inalterado. O elemento de volume em coordenadas cilíndricas

$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

pode ser considerado formalmente como o produto de dz pelo elemento de área $dA = r\, dr\, d\theta$. É uma conseqüência da fórmula $\Delta V = \bar{r}\, \Delta z\, \Delta r\, \Delta\theta$ do volume do *bloco cilíndrico* da Fig. 15.7.2.

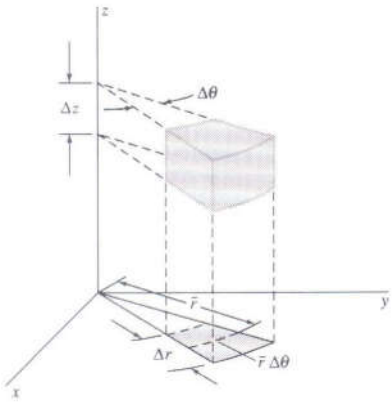

Fig. 15.7.2 O volume do bloco cilíndrico é $\Delta V = \bar{r}\, \Delta z\, \Delta r\, \Delta\theta$.

A integração em coordenadas cilíndricas é especialmente útil para cálculos relacionados com sólidos de revolução. Para que os limites de integração sejam os mais simples possíveis, o sólido deve, em geral, ser colocado de forma que o eixo de revolução seja o eixo z.

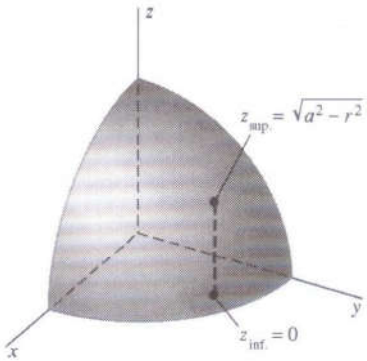

Fig. 15.7.3 O primeiro octante da esfera (Exemplo 1).

EXEMPLO 1 Ache o centróide da porção T do primeiro octante da bola sólida delimitada pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$. A Fig. 15.7.3 mostra o sólido.

Solução O volume do primeiro octante da bola sólida é $V = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{6}\pi a^3$. Como $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ por simetria, precisa-se calcular apenas

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV = \frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{1}{2}r(a^2 - r^2)\,dr\,d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}a^2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{a} d\theta = \frac{3}{\pi a^3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{3a}{8}.\end{aligned}$$

Assim, o centróide está localizado no ponto $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$. Observe-se que a resposta, além de plausível, é dimensionalmente correta.

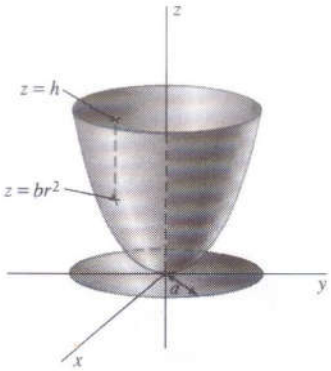

Fig. 15.7.4 O parabolóide do Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Ache o volume e o centróide do sólido T delimitado pelo parabolóide $z = b(x^2 + y^2)$ $(b > 0)$ e pelo plano $z = h$ $(h > 0)$.

Solução Pela Fig. 15.7.4, torna-se claro que se obterá o raio da parte superior de T igualando-se $z = b(x^2 + y^2) = br^2$ e $z = h$. Isto dá $a = \sqrt{h/b}$ como o raio do círculo sobre o qual o sólido se projeta. Logo, a Eq. (4), com $f(x, y, z) \equiv 1$, dá o volume:

$$\begin{aligned}V &= \iiint_T dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{br^2}^h r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a (hr - br^3)\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}ha^2 - \frac{1}{4}ba^4\right) = \frac{\pi h^2}{2b} = \frac{1}{2}\pi a^2 h\end{aligned}$$

(porque $a^2 = h/b$).

Por simetria, o centróide de T está no eixo z, de forma que resta calcular apenas $\bar{z}$:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV = \frac{2}{\pi a^2 h}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{br^2}^h rz\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi a^2 h}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(\frac{1}{2}h^2r - \frac{1}{2}b^2r^5\right)dr\,d\theta \\ &= \frac{4}{a^2h}\left(\frac{1}{4}h^2a^2 - \frac{1}{12}b^2a^6\right) = \frac{2}{3}h,\end{aligned}$$

novamente levando em conta que $a^2 = h/b$. Por conseguinte, o centróide de T está no ponto $(0, 0, 2h/3)$, resultado tanto plausível quanto dimensionalmente correto.

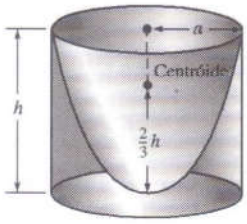

Fig. 15.7.5 Volume e centróide de um parabolóide circular reto em termos do cilindro circunscrito.

Pode-se resumir os resultados do Exemplo 2 como segue: O volume de um parabolóide circular reto é a *metade* do volume do cilindro circunscrito (Fig. 15.7.5) e seu centróide está localizado em seu eixo de simetria, a *dois terços* do caminho do "vértice" em (0, 0, 0) ao topo.

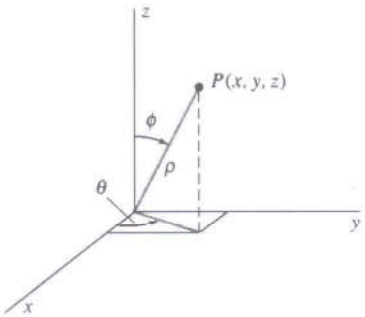

Fig. 15.7.6 Coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) do ponto P.

INTEGRAIS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Quando as superfícies fronteiras da região T de integração são esferas, cones, ou outras superfícies de representação simples em coordenadas esféricas, é conveniente transformar uma integral tripla sobre T para essas coordenadas. Recorde-se, da Seção 13.7, que a relação entre as coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) (Fig. 15.7.6) e as coordenadas retangulares (x, y, z) é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi. \tag{6}$$

Suponha-se, por exemplo, que T seja o **bloco esférico** definido pelas desigualdades simples

$$\begin{aligned} \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2 &= \rho_1 + \Delta\rho, \\ \phi_1 \leqq \phi \leqq \phi_2 &= \phi_1 + \Delta\phi, \\ \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2 &= \theta_1 + \Delta\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Conforme indicado pelas dimensões rotuladas na Fig. 15.7.7, este bloco esférico é (se $\Delta\rho$, $\Delta\phi$, $\Delta\theta$ são pequenos) *aproximadamente* um bloco retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_1 \Delta\phi$, e $\rho_1 \operatorname{sen} \phi_2 \Delta\theta$. Assim, seu volume é aproximadamente $\rho_1^2 \operatorname{sen} \phi_2 \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta$. Pode-se mostrar (ver Problema 19 da Seção 15.8) que o volume *exato* do bloco esférico descrito em (7) é

$$\Delta V = \hat{\rho}^2 \operatorname{sen} \hat{\phi} \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta \tag{8}$$

para certos números $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$ tais que $\rho_1 < \hat{\rho} < \rho_2$ e $\phi_1 < \hat{\phi} < \phi_2$.

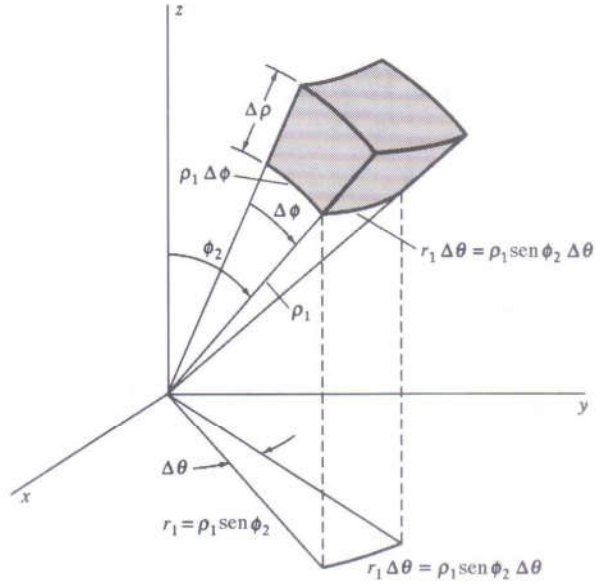

Fig. 15.7.7 O volume aproximado do bloco esférico é $\rho_1^2 \operatorname{sen} \phi_2 \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta$.

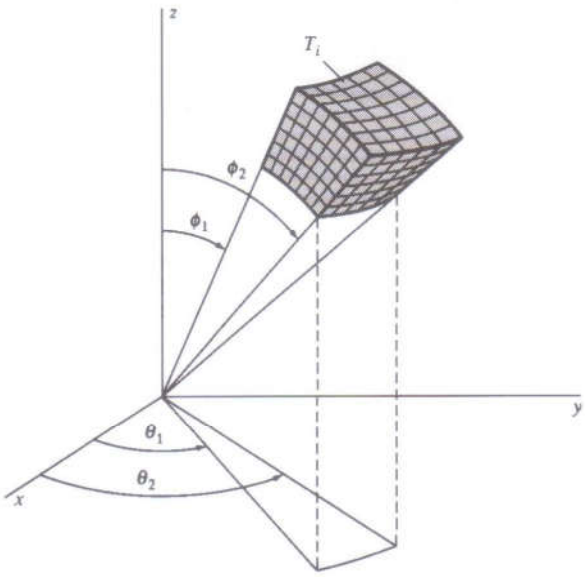

Fig. 15.7.8 O bloco esférico T dividido em n blocos esféricos menores.

Divida-se agora cada um dos intervalos $[\rho_1, \rho_2]$, $[\phi_1, \phi_2]$ e $[\theta_1, \theta_2]$ em n subintervalos iguais de comprimentos

$$\Delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{n}, \qquad \Delta\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{n} \qquad \text{e} \qquad \Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{n},$$

respectivamente. Isto gera uma **partição esférica** $\mathcal{P}$ do bloco esférico T em $k = n^3$ blocos esféricos menores $T_1, T_2, ..., T_k$; veja a Fig. 15.7.8. Pela Eq. (8), existe um ponto $(\hat{\rho}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_i)$ do bloco esférico T_i tal que seu volume é $\Delta V_i = \hat{\rho}_i \operatorname{sen} \hat{\phi}_i \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$. A norma $|\mathcal{P}|$ de $\mathcal{P}$ é o comprimento da maior diagonal dos pequenos blocos esféricos $T_1, T_2, ..., T_k$.

Se (x_i^*, y_i^*, z_i^*) são as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas esféricas $(\hat{\rho}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_i)$, então a definição de integral tripla como limite de somas de Riemann, quando a norma $|\mathcal{P}|$ tende para zero, dá

$$\begin{aligned}\iiint_T f(x, y, z)\, dV &= \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta V_i \\ &= \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\hat{\rho}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_i)\, \hat{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \hat{\phi}_i\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta,\end{aligned} \tag{9}$$

onde

$$F(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \tag{10}$$

é o resultado da substituição da Eq. (6) em $f(x, y, z)$. Mas a soma no membro direito na Eq. (9) é simplesmente uma soma de Riemann para a integral tripla

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Decorre, portanto, que

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta. \tag{11}$$

Assim, transforma-se a integral

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV$$

para coordenadas esféricas, substituindo-se as variáveis x, y, z em coordenadas retangulares por suas expressões na Eq. (6) em termos das variáveis ρ, ϕ e θ. Além disso, escreve-se

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

para o elemento de volume em coordenadas esféricas.

De modo mais geral, pode-se transformar a integral tripla

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV$$

para coordenadas esféricas sempre que a região T for **centralmente simples** — isto é, sempre que admita uma representação, em coordenadas esféricas, da forma

$$\rho_1(\phi, \theta) \leqq \rho \leqq \rho_2(\phi, \theta), \qquad \phi_1 \leqq \phi \leqq \phi_2, \qquad \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2. \tag{12}$$

Nesse caso, então

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1(\phi, \theta)}^{\rho_2(\phi, \theta)} F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta. \tag{13}$$

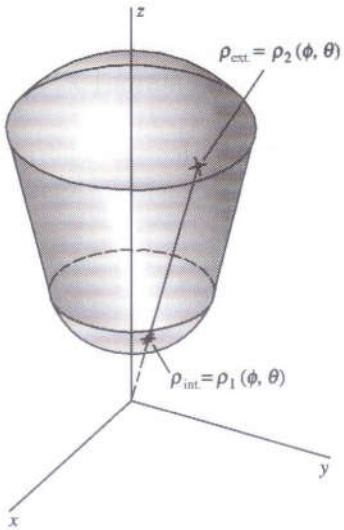

Fig. 15.7.9 Uma região centralmente simples.

Os limites de ρ são simplesmente as coordenadas ρ (em termos de ϕ e θ) das extremidades de um segmento radial genérico que une as partes "interior" e "exterior" da fronteira de T (Fig. 15.7.9). Assim, a fórmula geral para a **integração tripla em coordenadas esféricas** é

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV$$
$$= \iiint_U f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta, \tag{14}$$

onde, como anteriormente, U não denota uma região no espaço, e sim indica limites de ρ, ϕ e θ que descrevam adequadamente a região T em coordenadas esféricas.

EXEMPLO 3 Uma bola sólida T com densidade constante δ é delimitada pela superfície esférica de equação $\rho = a$. Utilizando coordenadas esféricas, calcule seu volume V e seu momento de inércia I_z em relação ao eixo z.

Solução Os pontos da bola T são dados pelas desigualdades

$$0 \leqq \rho \leqq a, \qquad 0 \leqq \phi \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Toma-se $f = F \equiv 1$ na Eq. (11), obtendo-se

$$V = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \Big[-\cos \phi \Big]_{\phi=0}^{\pi} d\theta = \tfrac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{4}{3} \pi a^3.$$

A distância do ponto genérico (ρ, ϕ, θ) da esfera ao eixo z é $r = \rho \operatorname{sen} \phi$, de forma que o momento de inércia da esfera em relação àquele eixo é

$$I_z = \iiint_T r^2 \delta\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \delta \rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{5} \delta a^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \tfrac{2}{5} \pi \delta a^5 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi\, d\phi = \tfrac{2}{5} \pi \delta a^5 \cdot 2 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{5} m a^2,$$

onde $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \delta$ é a massa da bola. A resposta está correta dimensionalmente, porque é o produto de uma massa pelo quadrado de uma distância. A resposta é plausível porque implica que, para fins de inércia rotacional, a esfera atua como se sua massa estivesse concentrada em um ponto a 63% do caminho do eixo ao equador.

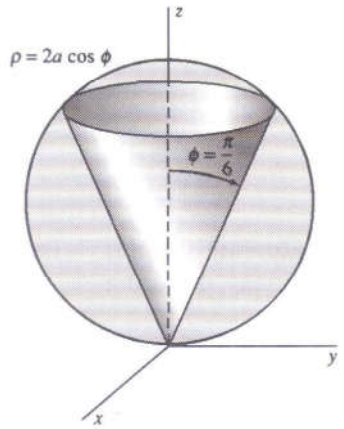

Fig. 15.7.10 O "cone de sorvete" do Exemplo 4 é a parte do cone interior à esfera.

EXEMPLO 4 Ache o volume e o centróide do "cone de sorvete" C delimitado pelo cone $\phi = \pi/6$ e pela esfera $\rho = 2a \cos \phi$ de raio a. A Fig. 15.7.10 mostra a esfera e a parte do cone interior a ela.

Solução O cone de sorvete é dado pelas desigualdades

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{6}, \qquad 0 \leqq \rho \leqq 2a \cos \phi.$$

Calculando seu volume com auxílio da Eq. (13), obtém-se

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \tfrac{8}{3}a^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$
$$= \tfrac{16}{3}\pi a^3 \left[-\tfrac{1}{4}\cos^4\phi\right]_0^{\pi/6} = \tfrac{7}{12}\pi a^3.$$

Quanto ao centróide, é claro, por simetria, que $\bar{x}=\bar{y}=0$. Como $z = \rho\cos\phi$, a coordenada z do centróide de C é

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_C z \, dV = \frac{12}{7\pi a^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \frac{48a}{7\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^5\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{96a}{7}\left[-\frac{1}{6}\cos^6\phi\right]_0^{\pi/6} = \frac{37a}{28}.$$

Assim, o centróide do cone de sorvete está no ponto $(0, 0, 37a/28)$.

15.7 Problemas

Resolva os Problemas 1 a 20 por integração tripla em coordenadas cilíndricas. Suponha que cada sólido tenha densidade unitária, a menos que se especifique outra função de densidade.

1. Determine o volume do sólido delimitado acima pelo plano $z = 4$ e abaixo pelo parabolóide $z = r^2$.

2. Determine o centróide do sólido do Problema 1.

3. Deduza a fórmula do volume de uma esfera de raio a.

4. Determine o momento de inércia, em relação ao eixo z, da esfera sólida do Problema 3, dado que o eixo z passa pelo seu centro.

5. Ache o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

6. Determine o centróide da metade da região do Problema 5, situada no plano xy ou acima dele.

7. Determine a massa do cilindro $0 \leqq r \leqq a$, $0 \leqq z \leqq h$, sabendo que sua densidade em (x, y, z) é z.

8. Determine o centróide do cilindro do Problema 7.

9. Determine o momento de inércia, em relação ao eixo z, do cilindro do Problema 7.

10. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (Fig. 15.7.11).

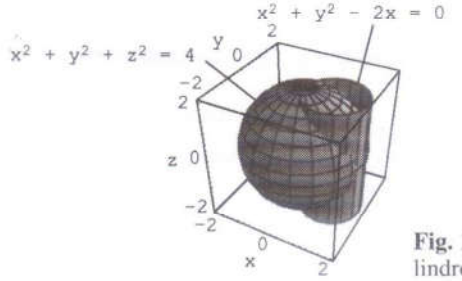

Fig. 15.7.11 A esfera e o cilindro do Problema 10.

11. Determine o volume e o centróide da região delimitada pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$.

12. Determine o volume e o centróide da região delimitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$.

13. Calcule o volume da região delimitada pelos parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 12 - x^2 - 2y^2$.

14. Determine o volume da região delimitada abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima pelo plano $z = 2x$ (Fig. 15.7.12).

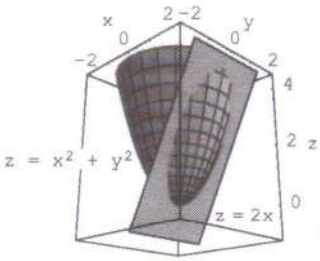

Fig. 15.7.12 O plano e o parabolóide do Problema 14.

15. Determine o volume da região delimitada acima pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ (Fig. 15.7.13).

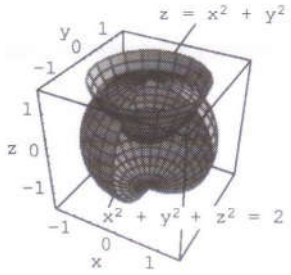

Fig. 15.7.13 A esfera e o parabolóide do Problema 15.

16. Um cilindro sólido homogêneo tem massa m e raio a. Mostre que seu momento de inércia, em relação ao seu eixo de simetria, é $\frac{1}{2}ma^2$.
17. Determine o momento de inércia I de um cilindro sólido homogêneo, em relação a um diâmetro de sua base. Expresse I em termos do raio a, da altura h e da densidade (constante) δ do cilindro.
18. Ache o centróide de um cilindro sólido homogêneo de raio a.
19. Ache o volume da região delimitada pelo plano $z = 1$ e pelo cone $z = r$.
20. Mostre que o centróide de um cone circular reto, sólido, homogêneo, está sobre seu eixo, a três quartos da distância do seu vértice à base.

Resolva os Problemas 21 a 30 por integração tripla em coordenadas esféricas.

21. Ache o centróide de um hemisfério sólido homogêneo de raio a.
22. Ache a massa e o centróide de um hemisfério sólido de raio a, se sua densidade δ é proporcional à distância z de sua base — de modo que $\delta = kz$ (k sendo uma constante positiva).
23. Resolva o Problema 19 por integração tripla em coordenadas esféricas.
24. Resolva o Problema 20 por integração tripla em coordenadas esféricas.
25. Ache o volume e o centróide do sólido interior à esfera $\rho = a$ e acima do cone $r = z$.
26. Determine o momento de inércia I_z do sólido do Problema 25, sob a hipótese de que tenha densidade constante δ.
27. Ache o momento de inércia, em relação a uma reta tangente, de uma esfera sólida homogênea de raio a e massa total m.
28. Uma casca esférica de massa m é delimitada pelas esferas $\rho = a$ e $\rho = 2a$, e sua função de densidade é $\delta = \rho^2$. Determine seu momento de inércia em relação a um diâmetro.
29. Descreva a superfície $\rho = 2a \operatorname{sen} \phi$ e calcule o volume da região por ela delimitada.
30. Descreva a superfície $\rho = 1 + \cos \phi$ e calcule o volume da região por ela delimitada. A Fig. 15.7.14 pode ajudar.

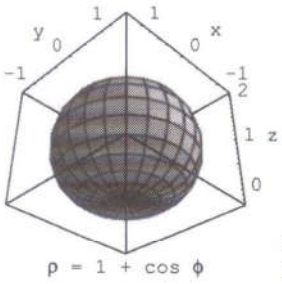

Fig. 15.7.14 A superfície do Problema 30.

31. Determine o momento de inércia, em relação ao eixo x, da região interior ao cilindro $r = a$ e à esfera $\rho = 2a$.
32. Ache o momento de inércia, em relação ao eixo z, do "cone de sorvete" do Exemplo 4.
33. Ache a massa e o centróide do "cone de sorvete" do Exemplo 4, se sua densidade é dada por $\delta = z$.
34. Considere uma bola esférica homogênea de raio a centrada na origem, com densidade δ e massa $M = \frac{4}{3}\pi a^3\delta$. Mostre que a força gravitacional $\mathbf{F}$ exercida por esta bola sobre uma massa pontual m situada no ponto $(0, 0, c)$ $(c > a)$ (Fig. 15.7.15) é a mesma que seria se toda a massa da bola estivesse concentrada em seu centro $(0, 0, 0)$. Ou seja, mostre que $|\mathbf{F}| = GMm/c^2$. [*Sugestão:* Por simetria, pode-se admitir que a força seja vertical, de forma que $\mathbf{F} = F_z\mathbf{k}$. Estabeleça a integral

$$F_z = -\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^\pi \frac{Gm\delta \cos \alpha}{w^2}\,\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta.$$

Mude a primeira variável de integração de ϕ para w, utilizando a lei dos co-senos:

$$w^2 = \rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \phi.$$

Então, $2w\,dw = 2\rho c \operatorname{sen} \phi \, d\phi$ e $w \cos \alpha + \rho \cos \phi = c$. (Por quê?)]

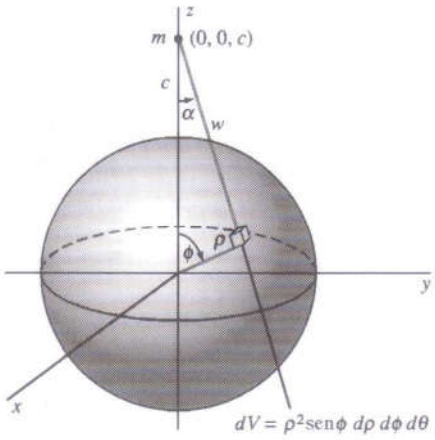

Fig. 15.7.15 O sistema do Problema 34.

35. Considere agora a casca esférica $a \leqq r \leqq b$ com densidade uniforme δ. Mostre que esta casca *não* exerce nenhuma força resultante sobre uma massa pontual m localizada no ponto $(0, 0, c)$ *em seu interior* — isto é, $|c| < a$. O cálculo é o mesmo que no Problema 34, exceto quanto aos limites de integração de ρ e w.

15.7 Projeto

Se a terra fosse uma esfera perfeita com raio $R = 6.370$ km, densidade *uniforme* δ e massa $M = \frac{4}{3}\delta\pi R^3$, então (de acordo com o Exemplo 3) seu momento de inércia em relação ao seu eixo polar seria $I = \frac{2}{5}MR^2$. Acontece, entretanto, que, na realidade,

$$I = kMR^2, \tag{15}$$

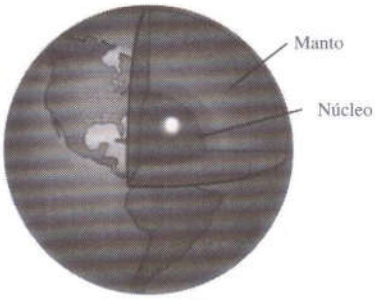

Fig. 15.7.16 O núcleo e o manto da Terra.

onde $k < 0{,}4 = \frac{2}{5}$. A razão é que, em lugar de ter um interior uniforme, a terra tem um núcleo denso recoberto por um manto menos denso de alguns milhares de quilômetros de espessura (Fig. 15.7.16). A densidade do núcleo é

$$\delta_1 \approx 11 \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3)$$

e a do manto é

$$\delta_2 \approx 5 \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3).$$

O valor numérico de k na Eq. (15) pode ser determinado a partir de certas observações de um satélite da terra. Se o momento polar de inércia I da terra e a massa M (do modelo núcleo-manto) são expressos em termos do raio (desconhecido) x do núcleo esférico, então, substituindo-se estas expressões na Eq. (15), obtém-se uma equação que pode ser resolvida em relação a x.

Mostre que esta equação pode ser escrita na forma

$$2(\delta_1 - \delta_2)x^5 - 5k(\delta_1 - \delta_2)R^2x^3 + (2 - 5k)\delta_2 R^5 = 0. \tag{16}$$

Dado o valor numérico medido $k = 0{,}371$, resolva esta equação (gráfica ou numericamente) para achar x, e com base nessa solução, determine a espessura do manto da terra.

15.8 Área de uma Superfície

Até agora, o conceito de superfície tem sido o gráfico $z = f(x, y)$ de uma função de duas variáveis. Ocasionalmente, uma tal superfície era definida implicitamente por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Agora, será introduzido o conceito mais preciso de *superfície paramétrica* — o análogo bidimensional de uma curva paramétrica.

Uma **superfície paramétrica** S é a *imagem* de uma função ou transformação $\mathbf{r}$ que é definida em uma região R do plano uv (Fig. 15.8.1) e toma valores no espaço xyz (Fig. 15.8.2). A **imagem**, por $\mathbf{r}$, de cada ponto (u, v) de R é o ponto no espaço xyz com vetor posição

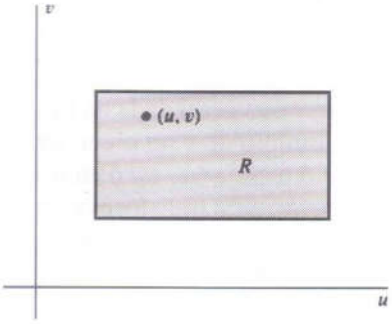

Fig. 15.8.1 A região uv R em que a transformação $\mathbf{r}$ é definida.

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v)\rangle. \tag{1}$$

Será admitido, em toda esta seção, que as funções componentes de $\mathbf{r}$ tenham derivadas parciais contínuas em relação a u e v, e também que os vetores

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \langle x_u, y_u, z_u\rangle = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \tag{2}$$

e

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \langle x_v, y_v, z_v\rangle = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} \tag{3}$$

sejam não-nulos e não-paralelos em todos os pontos interiores de R. (Compare com a definição de curva paramétrica *suave* $\mathbf{r}(t)$ na Seção 12.1.) As variáveis u e v são os *parâmetros* da superfície S (por analogia com o parâmetro único t para uma curva paramétrica).

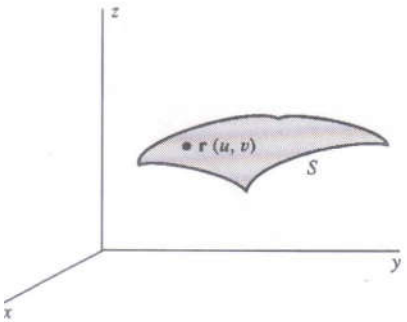

Fig. 15.8.2 A superfície paramétrica S no espaço xyz.

EXEMPLO 1 (a) Pode-se encarar o gráfico $z = f(x, y)$ de uma função como uma superfície paramétrica com parâmetros x e y. Em tal caso, a transformação $\mathbf{r}$ do plano xy para o espaço xyz tem as funções componentes

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = f(x, y). \tag{4}$$