

Fig. 15.4.21 A cunha do Problema 26.

30. Ache o volume delimitado pelo parabolóide $z = r^2$, pelo cilindro $r = 2a \operatorname{sen} \theta$ e pelo plano $z = 0$.

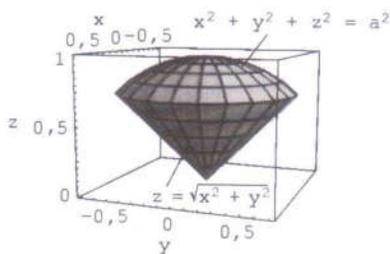


Fig. 15.4.22 O "cone de sorvete" do Problema 29.

31. Ache o volume do sólido delimitado, acima, pelo parabolóide $z = r^2$ e abaixo por um laço da lemniscata de equação $r^2 = 2 \operatorname{sen} \theta$.

32. Ache o volume interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e ao elipsóide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$.

33. Se $0 < h < a$, então o plano $z = a - h$ determina um segmento esférico de altura h e raio b da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (Fig. 15.4.23). (a) Mostre que $b^2 = 2ah - h^2$. (b) Mostre que o volume do segmento esférico é $V = \frac{1}{6}\pi h(3b^2 + h^2)$.

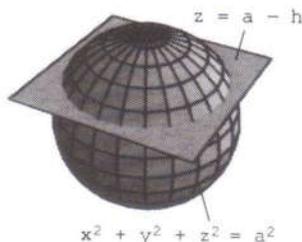


Fig. 15.4.23 O segmento esférico do Problema 33.

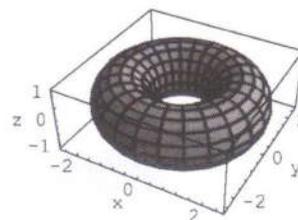


Fig. 15.4.24 O toro do Problema 35 (com $a = 1$ e $b = 2$).

34. Mostre, pelo método do Exemplo 5, que

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

35. Ache o volume do toro sólido obtido pela revolução do disco $r \leq a$ em torno da reta $x = b > a$ (Fig. 15.4.24). [Sugestão: Se o elemento de área $dA = r dr d\theta$ revolve em torno da reta, o volume gerado é $dV = 2\pi(b - x) dA$. Expresse tudo em coordenadas polares.]

15.5 Aplicações das Integrais Duplas

Pode-se utilizar a integral dupla para achar a massa m e o *centróide* (\bar{x}, \bar{y}) de uma lâmina, ou placa delgada, que ocupa uma região limitada R no plano xy . Supõe-se que a densidade da lâmina (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) seja dada pela função contínua $\rho(x, y)$.

Seja $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ uma partição interior de R , e escolhe-se um ponto (x_i^*, y_i^*) em cada sub-retângulo R_i (Fig. 15.5.1). Então, a massa do pedaço da lâmina que ocupa R_i é dada aproximadamente por $\rho(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i$, onde ΔA_i denota a área $a(R_i)$ de R_i . Logo, a massa de toda a lâmina é dada aproximadamente por

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i.$$

Quando a norma $|\mathcal{P}|$ da partição interior \mathcal{P} tende para zero, esta soma de Riemann tende para a integral dupla correspondente sobre R . *Define-se*, portanto, a **massa** m da lâmina pela fórmula

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA. \quad (1)$$

Em resumo,

$$m = \iint_R \rho dA = \iint_R dm$$

em termos da densidade ρ e do elemento de massa

$$dm = \rho dA.$$

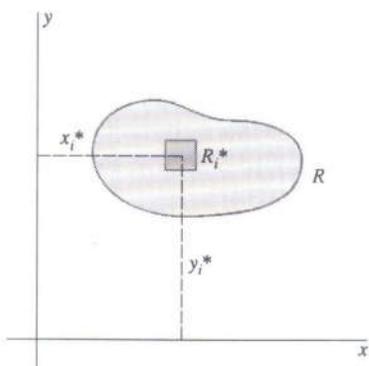


Fig. 15.5.1 O elemento de área $\Delta A_i = a(R_i)$.

As coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do **centróide**, ou *centro de massa*, da lâmina se definem como

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_R x \rho(x, y) dA, \quad (2)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_R y \rho(x, y) dA. \quad (3)$$



Pode-se rememorar estas fórmulas na forma

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_R x dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_R y dm.$$

Assim, \bar{x} e \bar{y} são os *valores médios* de x e y em relação à massa na região R . O centróide (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto da lâmina onde ela ficaria em equilíbrio horizontal se colocada na ponta de um palito (Fig. 5.5.2)

Se a função densidade ρ tem o valor *constante* $k > 0$, então as coordenadas de \bar{x} e \bar{y} são independentes do valor específico de k . (Por quê?) Neste caso, costuma-se tomar $\rho = 1$ nos cálculos. Além disso, aqui m terá o mesmo valor numérico que a área A de R , e (\bar{x}, \bar{y}) é então chamado **centróide da região plana R** .

Em geral, devem-se calcular todas as três integrais nas Eqs. (1) a (3) para se achar o centróide de uma lâmina. Mas, às vezes, é possível se valer do seguinte *princípio de simetria*: Se a região plana R (considerada como uma lâmina de densidade constante) é simétrica em relação à reta L — isto é, se R é levada sobre si mesma quando o plano gira de um ângulo de 180° em torno da reta L — então o centróide de R está sobre L (Fig. 5.5.3). Por exemplo, o centróide de um retângulo (Fig. 15.5.4) é o ponto de encontro das mediatrizes de seus lados, porque essas mediatrizes são também retas de simetria.

No caso de uma função de densidade ρ não-constante, exige-se (por simetria) que ρ — assim como a própria região — sejam simétricos em relação à linha geométrica L de simetria. Isto é, $\rho(P) = \rho(Q)$ se, conforme a Fig. 15.5.3, os pontos P e Q estão localizados simetricamente em relação a L . Então o centróide da lâmina R estará sobre a reta L de simetria.

EXEMPLO 1 Considere-se o disco semicircular de raio a mostrado na Fig. 15.5.5. Se ele tem densidade *constante* $\rho \equiv 1$, então sua massa é $m = \frac{1}{2}\pi a^2$ (numericamente igual à sua área), e, por simetria, seu centróide $C(0, \bar{y})$ está sobre o eixo y . Portanto, basta calcular

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_R y dm \\ &= \frac{2}{\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a (r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \quad (\text{coordenadas polares}) \\ &= \frac{2}{\pi a^2} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^a = \frac{2}{\pi a^2} \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

Assim, o centróide da lâmina semicircular está localizado no ponto $(0, 4a/3\pi)$. Observe-se que o valor calculado para \bar{y} tem dimensão de comprimento (porque a é um comprimento), como deve ser. Qualquer resposta com outra dimensão é suspeita.

Fig. 15.5.2 Uma lâmina equilibrada em seu centróide.

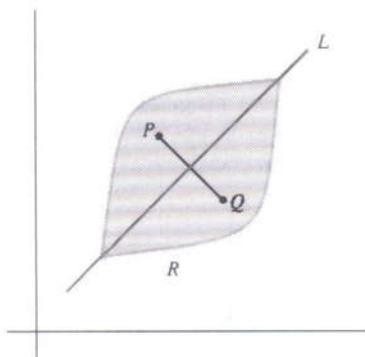


Fig. 15.5.3 Uma reta de simetria.

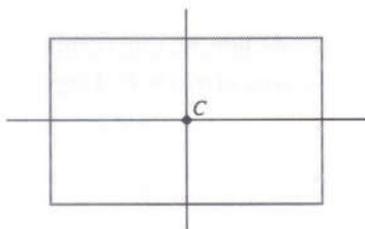


Fig. 15.5.4 O centróide de um retângulo.

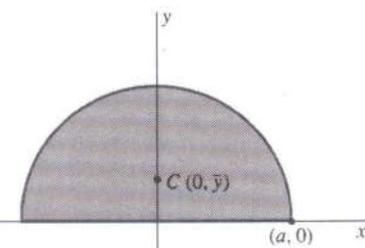


Fig. 15.5.5 O centróide de um disco semicircular (Exemplo 1).

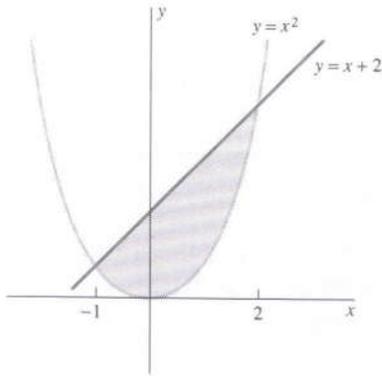


Fig. 15.5.6 A lâmina do Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Uma lâmina ocupa a região delimitada pela reta $y = x + 2$ e pela parábola $y = x^2$ (Fig. 15.5.6). A densidade da lâmina no ponto $P(x, y)$ é proporcional ao quadrado da distância de P ao eixo y — assim, $\rho(x, y) = kx^2$ (onde k é uma constante positiva). Determine a massa e o centróide da lâmina.

Solução A reta e a parábola se interceptam nos dois pontos $(-1, 1)$ e $(2, 4)$; assim, a Eq. (1) dá a massa

$$\begin{aligned} m &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^2 \, dy \, dx = k \int_{-1}^2 \left[x^2 y \right]_{y=x^2}^{x+2} dx \\ &= k \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - x^4) \, dx = \frac{63k}{20}. \end{aligned}$$

Então, as Eqs. (2) e (3) dão

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{20}{63k} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^3 \, dy \, dx = \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \left[x^3 y \right]_{y=x^2}^{x+2} dx \\ &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^3 - x^5) \, dx = \frac{20}{63} \cdot \frac{18}{5} = \frac{8}{7}; \\ \bar{y} &= \frac{20}{63k} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^2 y \, dy \, dx = \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=x^2}^{x+2} dx \\ &= \frac{10}{63} \int_{-1}^2 (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6) \, dx = \frac{10}{63} \cdot \frac{531}{35} = \frac{118}{49}. \end{aligned}$$

A lâmina deste exemplo tem, pois, massa $63k/20$ e seu centróide está localizado no ponto $(8/7, 118/49)$.

EXEMPLO 3 Uma lâmina tem a forma do quarto de círculo de raio a do primeiro quadrante, mostrado na Fig. 15.5.7. Sua densidade é proporcional à distância à origem — isto é, $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$ (onde k é uma constante positiva). Ache sua massa e seu centróide.

Solução Primeiro, passa-se às coordenadas polares, porque tanto a forma da fronteira da lâmina como a da sua densidade sugerem que tal substituição tornará os cálculos mais simples. A Eq. (1) dá então a massa

$$\begin{aligned} m &= \iint_R \rho \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a kr^2 \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^a d\theta = k \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} a^3 \, d\theta = \frac{k\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

Por simetria da lâmina e de sua função de densidade, o centróide está sobre a reta $y = x$. A Eq. (3) dá, assim,

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_R y\rho \, dA = \frac{6}{k\pi a^3} \int_0^{\pi/2} \int_0^a kr^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{6}{\pi a^3} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} r^4 \sin \theta \right]_{r=0}^a d\theta = \frac{6}{\pi a^3} \cdot \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = \frac{3a}{2\pi}. \end{aligned}$$

A lâmina dada tem, portanto, massa $\frac{1}{6}k\pi a^3$ e seu centróide está localizado no ponto $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$.

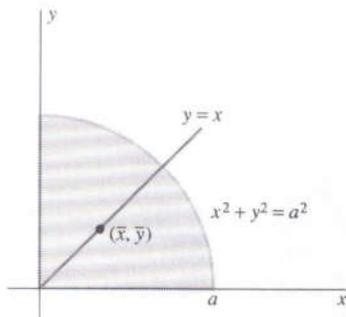


Fig. 15.5.7 Determinação da massa e do centróide (Exemplo 3).

VOLUME E O PRIMEIRO TEOREMA DE PAPPUS

Um importante teorema que relaciona centróides e volumes de revolução deve seu nome ao matemático grego Pappus, que o enunciou no terceiro século a.C.

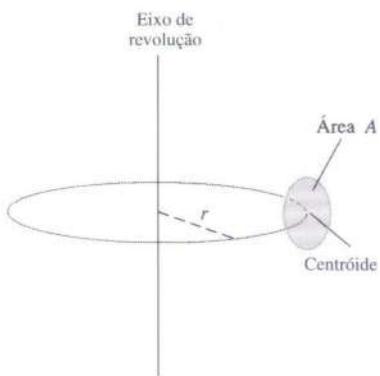


Fig. 15.5.8 Um sólido de volume $V = A \cdot d$ é gerado pela área A quando seu centróide percorre a distância $d = 2\pi r$ ao longo de um círculo de raio r .

Primeiro Teorema de Pappus: Volume de Revolução

Suponha-se que uma região plana R revolva em torno de um eixo em seu plano (Fig. 15.5.8), gerando um sólido de revolução com volume V . Suponha-se ainda que o eixo não intercepte o interior de R . Então, o volume

$$V = A \cdot d$$

é o produto da área A de R pela distância d percorrida pelo centróide de R .

Demonstração para o Caso Especial de uma Região como a da Fig. 15.5.9 Trata-se da região entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leq x \leq b$, tendo como eixo de revolução o eixo y . Então, em uma revolução em torno do eixo y , a distância percorrida pelo centróide de R é $d = 2\pi \bar{x}$. Pelo método das cascas cilíndricas [veja a Eq. (4) da Seção 6.3 e a Fig. 15.5.10], o volume do sólido gerado é

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} 2\pi x dy dx \\ &= 2\pi \iint_R x dA = 2\pi \bar{x} \cdot A \end{aligned}$$

[pela Eq. (2), com $\rho \equiv 1$.] Assim, $V = d \cdot A$. \square

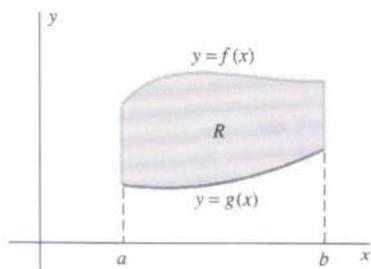


Fig. 15.5.9 Região R entre os gráficos de duas funções.

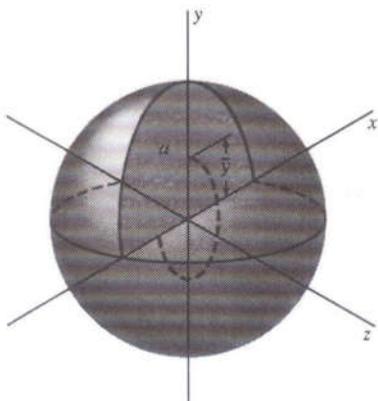


Fig. 15.5.11 Uma esfera de raio a gerada pela revolução de um semicírculo de área $A = \frac{1}{2}\pi a^2$ em torno de seu diâmetro no eixo x (Exemplo 4). O centróide do semicírculo se desloca ao longo de um círculo de circunferência $d = 2\pi \bar{y}$.

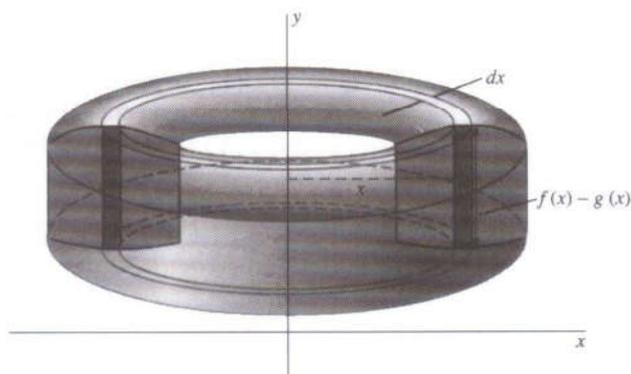


Fig. 15.5.10 Um sólido de revolução que consiste em cascas cilíndricas.

EXEMPLO 4 Ache o volume V da esfera de raio a gerada pela revolução, em torno do eixo x , do semicírculo D do Exemplo 1. Veja a Fig. 15.5.11.

Solução A área de D é $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, e, pelo Exemplo 1, $\bar{y} = 4a/3\pi$. Logo, o teorema de Pappus dá

$$V = 2\pi \bar{y} A = 2\pi \cdot \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

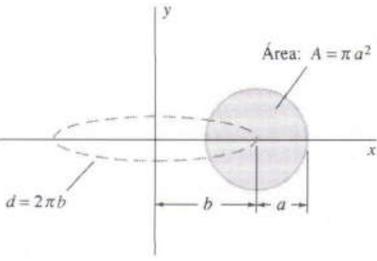


Fig. 15.5.12 A revolução do disco circular em torno do eixo y gera um toro (Exemplo 5).

EXEMPLO 5 Considere o disco circular da Fig. 15.5.12, com raio a e centro no ponto $(b, 0)$ com $0 < a < b$. Determine o volume V do toro sólido gerado pela revolução do disco em torno do eixo y . A Fig. 15.4.24 mostra esse toro.

Solução O centróide do círculo está no centro $(b, 0)$, e assim $\bar{x} = b$. Logo, o centróide, ao revolver, percorre a distância $d = 2\pi b$. Conseqüentemente,

$$V = d \cdot A = 2\pi b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b.$$

Observe-se que o resultado está correto dimensionalmente.

ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE E O SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS

Os centróides de *curvas* planas se definem por analogia com o método para regiões planas; por esta razão, apresenta-se este tópico com menos detalhes. Será suficiente abordar o caso da densidade constante $\rho \equiv 1$ (como um fio com massa unitária por unidade de comprimento). Então o centróide (\bar{x}, \bar{y}) da curva plana C se define pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{s} \int_C x \, ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{s} \int_C y \, ds \quad (4)$$

onde s é o comprimento de arco de C .

O significado das integrais na Eq. (4) é o da notação da Seção 6.4, isto é, ds é um símbolo que deve ser substituído (antes de se calcular a integral) por

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

conforme C seja um arco suave da forma $y = f(x)$ ou da forma $x = g(y)$. Como alternativa, pode-se ter

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

se C é dada em forma paramétrica, como na Seção 12.2.

EXEMPLO 6 Denote-se por J a metade superior do círculo (e não do disco) de raio a e centro $(0, 0)$, representado parametricamente por

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

A Fig. 15.5.13 mostra o arco J . Determine seu centróide.

Solução Note-se, primeiro, que $\bar{x} = 0$, por simetria. O comprimento de arco de J é $s = \pi a$; o elemento de comprimento de arco é

$$ds = \sqrt{(-a \sin t \, dt)^2 + (a \cos t \, dt)^2} = a \, dt.$$

Logo, a segunda fórmula em (4) dá

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi a} \int_0^\pi (a \sin t)(a \, dt) = \frac{a}{\pi} \left[-\cos t \right]_0^\pi = \frac{2a}{\pi}.$$

Assim, o centróide do arco semicircular está localizado no ponto $(0, 2a/\pi)$ sobre o eixo y . Observe-se que a resposta é plausível e dimensionalmente correta.

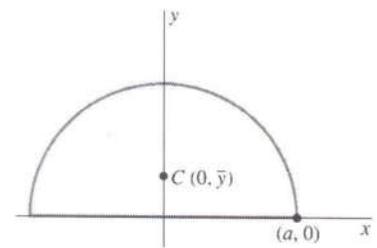


Fig. 15.5.13 O arco semicircular do Exemplo 6.

O primeiro teorema de Pappus admite um análogo para a área de uma superfície de revolução.

Segundo Teorema de Pappus: Área de uma Superfície de Revolução

Suponha-se que a curva C revolva em torno de um eixo de seu plano que não a intercepte. Então, a área

$$A = s \cdot d$$

da superfície de revolução gerada é igual ao produto do comprimento s de C pela distância d percorrida pelo centróide de C .

Demonstração para o Caso Especial em que C É um Arco Suave Descrito por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, e o Eixo de Revolução é o eixo y A distância percorrida pelo centróide de C é $d = 2\pi\bar{x}$. Pela Eq. (11) da Seção 6.4, a área da superfície de revolução é

$$A = \int_a^b 2\pi x \, ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = 2\pi s \cdot \frac{1}{s} \int_C x \, ds = 2\pi s\bar{x}$$

conforme Eq. (4). Portanto, $A = d \cdot s$, como se queria. \square

EXEMPLO 7 Ache a área A da superfície da esfera de raio a gerada pela revolução, em torno do eixo x , do arco semicircular do Exemplo 6.

Solução Já se encontrou que $\bar{y} = 2a/\pi$, e como se sabe que $s = \pi a$, o segundo teorema de Pappus dá

$$A = 2\pi\bar{y}s = 2\pi \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \pi a = 4\pi a^2.$$

EXEMPLO 8 Ache a área A da superfície do toro do Exemplo 5.

Solução Faz-se agora revolver, em torno do eixo y , o círculo (e não o disco) de raio a e centro no ponto $(b, 0)$. Naturalmente, o centróide do círculo está localizado em seu centro $(b, 0)$, o que decorre do princípio de simetria, podendo também ser verificado por cálculos como os do Exemplo 6. Logo, a distância percorrida pelo centróide é $d = 2\pi b$. Como a circunferência do círculo é $s = 2\pi a$, o segundo teorema de Pappus dá

$$A = 2\pi b \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ab.$$

MOMENTOS DE INÉRCIA

Sejam R uma lâmina plana e L uma linha reta que pode estar, ou não, no plano xy . O **momento de inércia** I de R em relação ao eixo L se define como

$$I = \iint_R w^2 \, dm, \tag{5}$$

onde $w = w(x, y)$ denota a distância (perpendicular) a L , de um ponto genérico (x, y) de R .

O caso mais importante é aquele em que o eixo é o eixo z , sendo $w = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Fig. 15.5.14). Neste caso, $I = I_0$ é o **momento polar de inércia** da lâmina R . Define-se, assim, o momento polar de inércia de R como

$$I_0 = \iint_R r^2 \rho(x, y) \, dA = \iint_R (x^2 + y^2) \, dm. \tag{6}$$

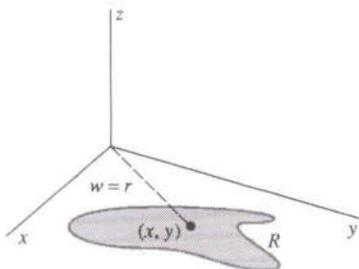


Fig. 15.5.14 Uma lâmina no plano xy no espaço.

Decorre que

$$I_0 = I_x + I_y,$$

onde

$$I_x = \iint_R y^2 dm = \iint_R y^2 \rho dA \quad (7)$$

e

$$I_y = \iint_R x^2 dm = \iint_R x^2 \rho dA. \quad (8)$$

Aqui, I_x é o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo x , e I_y é o momento de inércia em relação ao eixo y .

Uma aplicação importante dos momentos de inércia envolve a *energia cinética de rotação*. Considere-se um disco circular revolvendo em torno do seu centro (a origem) com velocidade angular de ω radianos por segundo. Um elemento de massa dm , à distância r da origem, se move com velocidade (linear) $v = r\omega$ (Fig. 15.5.15). Assim, a energia cinética desse elemento de massa é

$$\frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm.$$

Pela soma, por integração, sobre todo o disco, vê-se que sua energia cinética, devida à rotação com velocidade angular ω , é

$$EC_{\text{rot}} = \iint_R \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \iint_R r^2 dm; \quad (9)$$

isto é,

$$EC_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_0\omega^2.$$

Como a energia cinética linear tem a fórmula $EC = \frac{1}{2}mv^2$, a Eq. (9) sugere que o momento de inércia é o análogo rotacional da massa.

EXEMPLO 9 Calcule I_x para uma lâmina de densidade constante $\rho \equiv 1$ que ocupa a região delimitada pelas curvas $x = \pm y^4$, $-1 \leq y \leq 1$ (Fig. 15.5.16).

Solução A Eq. (7) dá

$$I_x = \int_{-1}^1 \int_{-y^4}^{y^4} y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left[xy^2 \right]_{x=-y^4}^{y^4} dy = \int_{-1}^1 2y^6 dy = \frac{4}{7}.$$

A região do Exemplo 9 se assemelha à seção transversal de uma viga em I. Sabe-se que a rigidez, ou resistência ao encurvamento, de uma viga horizontal é proporcional ao momento de inércia de sua seção transversal, em relação a um eixo horizontal pelo centróide da referida seção. Compare-se a viga em I com uma viga retangular de igual altura 2 e igual área

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-y^4}^{y^4} 1 dx dy = \frac{4}{5}.$$

A Fig. 15.5.17 mostra a seção transversal de uma tal viga retangular. Sua largura é $\frac{2}{5}$, e o momento de inércia de sua seção transversal é

$$I_x = \int_{-1}^1 \int_{-1/5}^{1/5} y^2 dx dy = \frac{4}{15}.$$

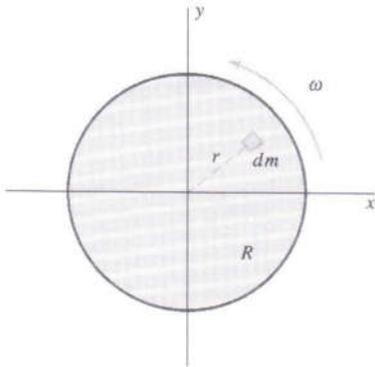


Fig. 15.5.15 O disco em rotação.

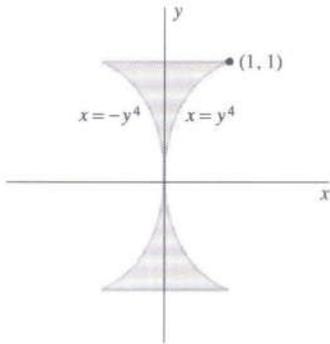


Fig. 15.5.16 A lâmina do Exemplo 9.

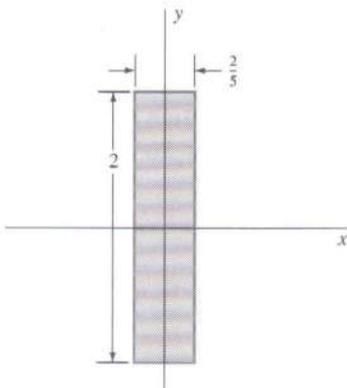


Fig. 15.5.17 Uma viga retangular, para comparação com a viga em I do Exemplo 9.

Como a razão de $\frac{4}{7}$ para $\frac{4}{15}$ é $\frac{15}{7}$, vê-se que a viga em I é duas vezes mais forte que uma viga retangular de mesma área de seção transversa. Esta é a razão por que as vigas em I são geralmente utilizadas em construção.

EXEMPLO 10 Ache o momento polar de inércia de uma lâmina circular R de raio a e densidade constante ρ , centrada na origem.

Solução Em coordenadas cartesianas, a lâmina R ocupa a região plana $x^2 + y^2 \leq a^2$; em coordenadas polares, esta região é descrita de forma muito mais simples por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A Eq. (6) dá então

$$I_0 = \iint_R r^2 \rho \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho r^3 \, dr \, d\theta = \frac{\rho \pi a^4}{2} = \frac{1}{2} m a^2,$$

onde $m = \rho \pi a^2$ é a massa da lâmina circular.

Finalmente, o **raio de giração** \hat{r} de uma lâmina de massa m em torno de um eixo se define como

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{I}{m}}, \quad (10)$$

onde I é o momento de inércia da lâmina em relação àquele eixo. Por exemplo, os raios de giração \hat{x} e \hat{y} em relação ao eixo y e ao eixo x , respectivamente, são dados por

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \quad \text{e} \quad \hat{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}}. \quad (11)$$

Suponha-se agora que esta lâmina esteja no semiplano direito $x > 0$, e seja simétrica em relação ao eixo x . Se ela representa a face de uma raquete de tênis cujo cabo (de peso desprezível) se estende ao longo do eixo x , da origem à face da raquete, então o ponto $(\hat{x}, 0)$ é um candidato plausível para o ponto da raquete que proporciona impacto e controle máximos (*sweet spot*) (veja o Problema 56).

A definição na Eq. (10) é motivada pela consideração de uma lâmina plana R girando com velocidade angular ω em torno do eixo z (Fig. 15.5.18). Então a Eq. (10) dá

$$I_0 = m \hat{r}^2,$$

decorrendo então, da Eq. (9), que a energia cinética da lâmina é

$$EC = \frac{1}{2} m (\hat{r} \omega)^2.$$

Assim, a energia cinética da lâmina em rotação é igual à energia cinética de uma partícula isolada de massa m revolvendo à distância \hat{r} do eixo de revolução.

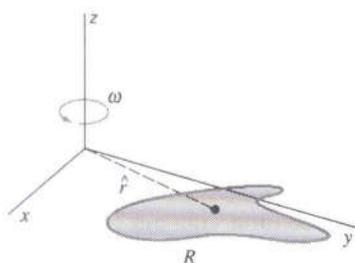


Fig. 15.5.18 Uma lâmina plana em rotação em torno do eixo z .

15.5 Problemas

Nos Problemas 1 a 10, ache o centróide da região plana delimitada pelas curvas dadas. Admita que a densidade seja $\rho \equiv 1$ para cada região.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 6$
2. $x = 1, x = 3, y = 2, y = 4$
3. $x = -1, x = 3, y = -2, y = 4$
4. $x = 0, y = 0, x + y = 3$
5. $x = 0, y = 0, x + 2y = 4$
6. $y = 0, y = x, x + y = 2$
7. $y = 0, y = x^2, x = 2$
8. $y = x^2, y = 9$
9. $y = 0, y = x^2 - 4$
10. $x = -2, x = 2, y = 0, y = x^2 + 1$

Nos Problemas 11 a 30, ache a massa e o centróide de uma lâmina plana com a forma e a densidade indicadas.

11. A região triangular delimitada por $x = 0, y = 0, e x + y = 1$, com $\rho(x, y) = xy$.
12. A região triangular do Problema 11, com $\rho(x, y) = x^2$.
13. A região delimitada por $y = 0, e y = 4 - x^2$, com $\rho(x, y) = y$.
14. A região delimitada por $x = 0 e x = 9 - y^2$, com $\rho(x, y) = x^2$.
15. A região delimitada pelas parábolas $y = x^2 e x = y^2$, com $\rho(x, y) = xy$.
16. A região do Problema 15, com $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.
17. A região delimitada pelas parábolas $y = x^2 e y = 2 - x^2$, com $\rho(x, y) = y$.
18. A região delimitada por $x = 0, x = e, y = 0 e y = \ln x$, para $1 \leq x \leq e$, com $\rho(x, y) \equiv 1$.
19. A região delimitada por $y = 0 e y = \sin x$, para $0 \leq x \leq \pi$, com $\rho(x, y) \equiv 1$.
20. A região delimitada por $y = 0, x = -1, x = 1, e y = \exp(-x^2)$, com $\rho(x, y) = |xy|$.
21. O quadrado de vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$ e $(a, 0)$, com $\rho(x, y) = x + y$.
22. A região triangular delimitada pelos eixos coordenados e pela reta $x + y = a$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.
23. A região delimitada por $y = x^2 e y = 4$; $\rho(x, y) = y$.
24. A região delimitada por $y = x^2 e y = 2x + 3$; $\rho(x, y) = x^2$.
25. A região do Problema 19; $\rho(x, y) = x$.
26. A região semicircular $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$; $\rho(x, y) = y$.
27. A região do Problema 26; $\rho(x, y) = r$ (a coordenada polar radial).
28. A região delimitada pela cardióide de equação polar $r = 1 + \cos \theta$; $\rho = r$ (Fig. 15.5.19).

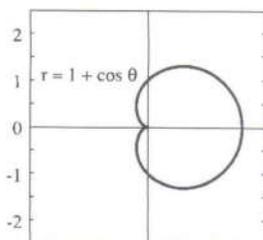


Fig. 15.5.19 A cardióide do Problema 28.

29. A região interior ao círculo $r = 2 \sin \theta$ e exterior ao círculo $r = 1$; $\rho(x, y) = y$.
30. A região interior ao caracol $r = 1 + 2 \cos \theta$ e exterior ao círculo $r = 2$; $\rho(x, y) = r$ (Fig. 15.5.20).

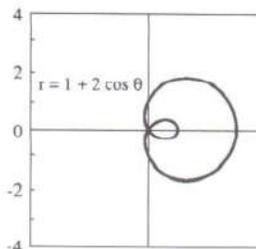


Fig. 15.5.20 O caracol do Problema 30.

Nos Problemas 31 a 35, determine o momento polar de inércia I_0 da lâmina indicada.

31. A região delimitada pelo círculo $r = a$; $\rho(x, y) = r^n$, n sendo um inteiro positivo fixo.
32. A lâmina do Problema 26.
33. O disco delimitado por $r = 2 \cos \theta$; $\rho(x, y) = k$ (constante positiva).
34. A lâmina do Problema 29.
35. A região delimitada pelo laço direito da lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = r^2$ (Fig. 15.5.21).

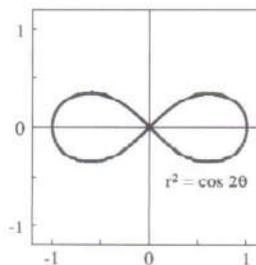


Fig. 15.5.21 A lemniscata do Problema 35.

Nos Problemas 36 a 40, determine os raios de giração \hat{x} e \hat{y} da lâmina indicada, em relação aos eixos coordenados.

36. A lâmina do Problema 21.
37. A lâmina do Problema 23.
38. A lâmina do Problema 24.
39. A lâmina do Problema 27.
40. A lâmina do Problema 33.
41. Determine o centróide do primeiro quadrante do disco circular $x^2 + y^2 \leq r^2$, por cálculo direto, como no Exemplo 1.
42. Aplique o primeiro teorema de Pappus para achar o centróide do primeiro quadrante do disco circular $x^2 + y^2 \leq r^2$. Tenha em mente que $\bar{x} = \bar{y}$ (por simetria) e que a revolução do quarto de disco em torno de qualquer um dos eixos coordenados gera um hemisfério sólido de volume $V = \frac{2}{3} \pi r^3$.
43. Determine, por cálculo direto, como no Exemplo 6, o centróide do arco do primeiro quadrante do círculo $x^2 + y^2 = r^2$.
44. Aplique o segundo teorema de Pappus para achar o centróide do quarto de círculo do Problema 43. Note que $\bar{x} = \bar{y}$ (por si-

metria), e que a revolução desse arco, em torno de qualquer um dos eixos coordenados, gera um hemisfério cuja área de superfície é $A = 2\pi r^2$.

45. Mostre, por um cálculo direto, que o centróide do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(r, 0)$ e $(0, h)$ é o ponto $(r/3, h/3)$. Verifique que este ponto pertence à reta que passa pelo vértice $(0, 0)$ e pelo ponto médio do lado oposto do triângulo, e está a dois terços do caminho do vértice ao ponto médio.

46. Aplique o primeiro teorema de Pappus e o resultado do Problema 45 para verificar a fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ do volume do cone obtido pela revolução do triângulo em torno do eixo y .

47. Aplique o segundo teorema de Pappus para mostrar que a área da superfície lateral do cone do Problema 46 é $A = \pi rL$, onde $L = \sqrt{r^2 + h^2}$ é a altura inclinada (geratriz) do cone.

48. (a) Ache o centróide do trapézio da Fig. 15.5.22. (b) Aplique o primeiro teorema de Pappus e o resultado da parte (a) para mostrar que o volume do tronco de cone gerado pela revolução do trapézio em torno do eixo y é

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

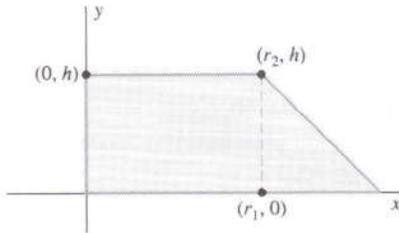


Fig. 15.5.22 O trapézio do Problema 48.

49. Aplique o segundo teorema de Pappus para mostrar que a área da superfície lateral do tronco de cone do Problema 48 é $A = \pi(r_1 + r_2)L$, onde

$$L = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$$

é sua altura inclinada.

50. (a) Aplique o segundo teorema de Pappus para verificar que a área da superfície curva de um cilindro circular reto de altura h e raio da base r é $A = 2\pi rh$. (b) Explique como este fato também decorre do resultado do Problema 49.

51. (a) Determine o centróide da região plana mostrada na Fig. 15.5.23, que consiste em uma região semicircular de raio a apoiada sobre uma região retangular de largura $2a$ e altura b , cuja base está sobre o eixo x . (b) Aplique então o primeiro teorema de Pappus para achar o volume gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x .

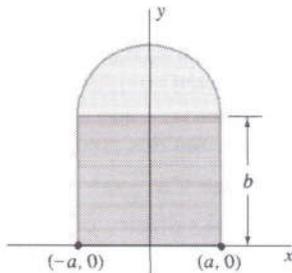


Fig. 15.5.23 A região plana do Problema 51(a).

52. (a) Considere a região plana da Fig. 15.5.24, delimitada por $x^2 = 2py$, $x = 0$ e $y = h = r^2/2p$ ($p > 0$). Mostre que sua área é $A = \frac{2}{3}rh$ e que a coordenada x de seu centróide é $\bar{x} = 3r/8$. (b) Aplique o teorema de Pappus e o resultado da parte (a) para mostrar que o volume de um parabolóide de revolução com raio r e altura h é $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

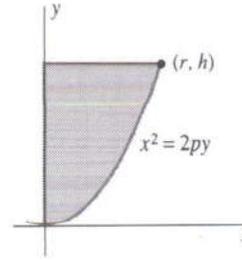


Fig. 15.5.24 A região do Problema 52.

53. Ache o centróide da região não-limitada compreendida entre o gráfico de $y = e^{-x}$ e o eixo x , $x \geq 0$.

54. O centróide de uma região plana uniforme está em $(0, 0)$ e a região tem massa total m . Mostre que seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano xy no ponto (x_0, y_0) é

$$I = I_0 + m(x_0^2 + y_0^2).$$

55. Suponha que uma lâmina plana consista em duas lâminas que não se superpõem. Mostre que seu momento polar de inércia é a soma dos momentos das duas lâminas componentes. Com auxílio deste fato e com os resultados dos Problemas 53 e 54, determine o momento polar de inércia da lâmina em forma de T de densidade constante $\rho = k > 0$, mostrada na Fig. 15.5.25.

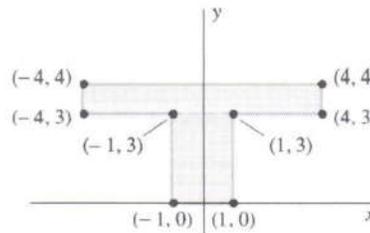


Fig. 15.5.25 Uma lâmina constituída de duas lâminas mais simples (Problema 55).

56. Uma raquete consiste em uma lâmina uniforme que ocupa a região interior do laço direito de $r^2 = \cos 2\theta$ na extremidade de um cabo (de massa desprezível) correspondente ao intervalo $-1 \leq x \leq 0$ (Fig. 15.5.26). Determine o raio de giração da raquete em relação à reta $x = -1$. Onde está o ponto da raquete que proporciona impacto e controle máximos (*sweet spot*)?

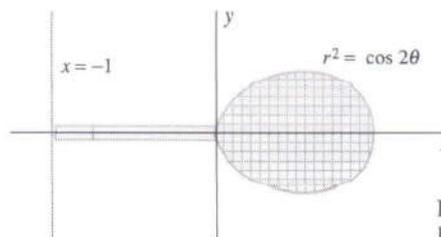


Fig. 15.5.26 A raquete do Problema 56.

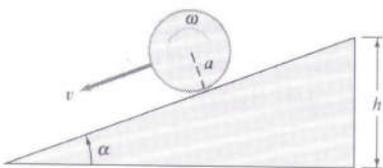


Fig. 15.5.27 Um objeto circular rolando por uma rampa.

Para ver os momentos de inércia em ação, suponha-se que um clube esteja planejando uma corrida de carros sem motor para o torneio anual de descida de uma colina. Tem-se a escolha entre rodas sólidas, rodas de bicicleta com raios finos, ou rodas esféricas sólidas (como mancais gigantes). Que tipo de roda imprimirá maior velocidade aos carros?

Suponha-se um experimento em que se liberem vários tipos de rodas em um plano inclinado, para saber qual chega à base primeiro (Fig. 15.5.27). Suponha-se que uma roda de raio a e massa M parta do repouso no topo, com energia potencial $EP = Mgh$ e chegue à base com velocidade angular ω e velocidade (linear) $v = a\omega$. Então, pela conservação da energia, a energia potencial inicial da roda se transformou em uma soma $EC_{tr} + EC_{rot}$ de energia cinética translacional $EC_{tr} = \frac{1}{2}Mv^2$ e energia cinética rotacional

$$EC_{rot} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{I_0v^2}{2a^2}, \quad (12)$$

conseqüência da Eq. (9) desta Seção. Assim,

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{I_0v^2}{2a^2}. \quad (13)$$

Os Problemas 1 a 8 exploram as implicações desta fórmula.

1. Suponha que o momento de inércia (polar) da roda seja dado por

$$I_0 = kMa^2 \quad (14)$$

para uma constante k . (Por exemplo, o Exemplo 10 dá $k = \frac{1}{2}$ para uma roda com a forma de um disco sólido uniforme.) Deduza, então, da Eq. (13), que

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}. \quad (15)$$

Assim, quanto menor for k (e, daí, quanto menor for o momento de inércia da roda), mais depressa a roda descerá o plano inclinado.

Nos Problemas 2 a 8, tome $g = 32 \text{ ft/s}^2$ e suponha que a altura vertical do plano inclinado seja $h = 100 \text{ ft}$.

2. Por que razão decorre da Eq. (4) que, qualquer que seja o tipo da roda, a velocidade máxima que uma roda circular pode atingir nesse plano inclinado é de 80 ft/s (ligeiramente abaixo de 55 mi/h)?

3. Se a roda é um disco sólido uniforme (como a roda de uma diligência dos velhos tempos) com $I_0 = \frac{1}{2}Ma^2$, qual é sua velocidade v no final do plano inclinado?

4. Responda o Problema 3 se a roda tem a forma de um pneu fino de bicicleta, com toda sua massa concentrada à distância a do seu centro. Neste caso, $I_0 = Ma^2$. (Por quê?)

5. Responda o Problema 3 se a roda tem a forma de uma coroa circular (ou arruela) com raio exterior a e raio interior b .

Não tente resolver os Problemas 6 a 8, até ter estudado o Exemplo 3 da Seção 15.7. Nos Problemas 6 a 8, qual é a velocidade da roda quando ela atinge a base do plano inclinado?

6. A roda é uma esfera sólida uniforme de raio a .

7. A roda é uma casca esférica muito delgada, cuja massa total está concentrada à distância a do seu centro.

8. A roda é uma casca esférica com raio exterior a e raio interior $b = \frac{1}{2}a$.

Finalmente, qual é sua conclusão? Qual é a forma da roda que permite a descida mais rápida de um carro?