*Nos Problemas 15 a 24, esboce primeiro a região de integração, em seguida inverta a ordem de integração como nos Exemplos 2 e 3 e, finalmente, calcule a integral resultante.*

**15.** $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2y\,dy\,dx$

**16.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^4}^{x} (x-1)\,dy\,dx$

**17.** $\displaystyle\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} x\,dy\,dx$

**18.** $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{y^2-4}^{4-y^2} y\,dx\,dy$

**19.** $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{2x}^{4x-x^2} 1\,dy\,dx$

**20.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{-x^2}\,dx\,dy$

**21.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{x}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy\,dx$

**22.** $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}}\int_{y}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy$

**23.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} \frac{1}{1+x^4}\,dx\,dy$

**24.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\operatorname{tg}^{-1} y}^{\pi/4} \sec x\,dx\,dy$

**25.** Utilizando somas de Riemann, prove a Eq. (6) para o caso em que $R$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados.

**26.** Com auxílio de integrais iteradas e de propriedades conhecidas das integrais simples, prove a Eq. (7) para o caso em que $R$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados.

**27.** Utilizando somas de Riemann, prove as desigualdades em (8) para o caso em que $R$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados.

**28.** Utilize integrais iteradas e propriedades conhecidas das integrais simples para provar a Eq. (9) se $R_1$ e $R_2$ são retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados e o lado direito de $R_1$ é o lado esquerdo de $R_2$.

**29.** Por meio de somas de Riemann, prove que

$$\iint_R f(x, y)\,dA \leqq \iint_R g(x, y)\,dA$$

se $f(x, y) \leqq g(x, y)$ em todos os pontos da região $R$, um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados.

**30.** Suponha que a função contínua $f$ seja integrável na região plana $R$ e que $f$ atinja um valor mínimo $m$ e um valor máximo $M$ em $R$. Suponha ainda que $R$ seja *conexa*, no seguinte sentido: Para dois pontos arbitrários $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ de $R$, existe uma curva paramétrica contínua $\mathbf{r}(t)$ em $R$ para a qual $\mathbf{r}(0) = \langle x_0, y_0 \rangle$ e $\mathbf{r}(1) = \langle x_1, y_1 \rangle$. Deduza então, de (8), a *propriedade do valor médio* para integrais duplas:

$$\iint_R f(x, y)\,dA = f(\hat{x}, \hat{y}) \cdot a(R)$$

para algum ponto $(\hat{x}, \hat{y})$ de $R$. [*Sugestão:* Se $m = f(x_0, y_0)$ e $M = f(x_1, y_1)$, então se pode aplicar a propriedade do valor intermediário da função contínua $f(\mathbf{r}(t))$.]

## 15.3 Área e Volume por Integração Dupla

A definição de $\iint_R f(x, y)\,dA$ foi *motivada* na Seção 15.2 pelo problema do cálculo do volume do sólido

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R \quad \text{e} \quad 0 \leqq z \leqq f(x, y)\}$$

situado abaixo da superfície $z = f(x, y)$ e acima da região $R$ no plano $xy$. A Fig. 15.3.1 mostra um tal sólido. Apesar desta motivação geométrica, a definição efetiva da integral dupla como um limite de somas de Riemann não depende do conceito de volume. Pode-se, assim, inverter a situação e utilizar a integral dupla para *definir* volume.

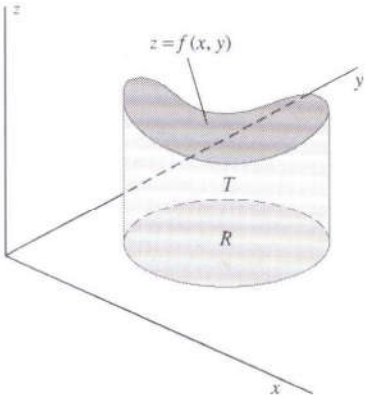


**Fig. 15.3.1** Uma região sólida $T$ com lados verticais e base $R$ no plano $xy$.

**Definição *Volume sob $z = f(x, y)$***

Suponha-se que a função $f$ seja contínua e não-negativa na região plana limitada $R$. Então, o **volume** $V$ do sólido sob a superfície $z = f(x, y)$ e acima da região $R$ se define como

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA, \tag{1}$$

desde que esta integral exista.

É interessante observar a conexão entre esta definição e a abordagem do volume por seções transversas, discutida na Seção 6.2. Se, por exemplo, a região $R$ é verticalmente simples, então a integral de volume da Eq. (1) toma a forma

$$V = \iint_R z\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

em termos de integrais iteradas. A integral interior

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

é igual à área da região no plano $yz$ que está abaixo da curva

$$z = f(x, y) \qquad (x \text{ fixo})$$

e acima do intervalo $y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x)$ (Fig. 15.3.2). Mas isto é a projeção da seção transversa mostrada na Fig. 15.3.3. Logo, o valor da integral interior é simplesmente a área da seção transversa da região sólida $T$ em um plano perpendicular ao eixo $x$. Assim,

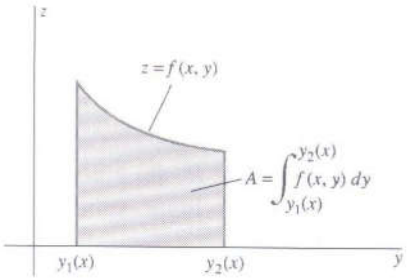


**Fig. 15.3.2** A integral interior na Eq. (1) como a área de uma região no plano $yz$.

$$V = \int_a^b A(x)\, dx,$$

e, neste caso, a Eq. (1) se reduz a "o volume é a integral da área da seção transversa".

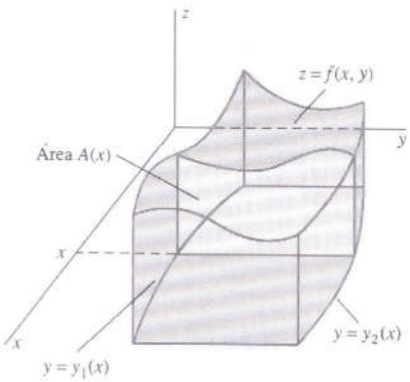


**Fig. 15.3.3** A área da seção transversa é $A = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

**EXEMPLO 1** O retângulo $R$ no plano $xy$ consiste nos pontos $(x, y)$ tais que $0 \leqq x \leqq 2$ e $0 \leqq y \leqq 1$. Determine o volume $V$ do sólido abaixo da superfície $z = 1 + xy$ e acima de $R$.

***Solução*** Aqui, $f(x, y) = 1 + xy$, e a Eq. (1) dá

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^2 \int_0^1 (1 + xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[ y + \tfrac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^2 (1 + \tfrac{1}{2}x)\, dx = \left[ x + \tfrac{1}{4}x^2 \right]_0^2 = 3.$$

## VOLUME POR INTEGRAIS ITERADAS

Uma região tridimensional $T$ é descrita genericamente em termos das superfícies que a delimitam. O primeiro passo ao se aplicar a Eq. (1) para calcular o volume $V$ de uma tal região é determinar a região $R$ no plano $xy$ sobre a qual $T$ está situada. O segundo passo consiste em determinar a ordem de integração apropriada, para o que se pode proceder como se segue:

Se cada reta vertical no plano $xy$ encontra $R$ *segundo* um *único* segmento de reta, então $R$ é verticalmente simples, e pode-se integrar primeiro em relação a $y$. Os limites de $y$ serão as coordenadas $y$ $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos pontos extremos deste segmento (Fig. 15.3.4). Os limites de $x$ serão os pontos extremos $a$ e $b$ do intervalo no eixo $x$ sobre o qual $R$ se projeta. O Teorema 1 da Seção 15.2 dá então

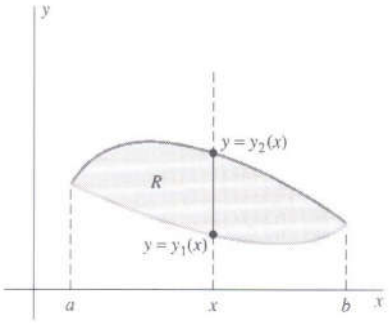


**Fig. 15.3.4** Uma região verticalmente simples.

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{2}$$

Alternativamente,

Se cada reta horizontal no plano $xy$ encontra $R$ segundo um *único* segmento, então $R$ é horizontalmente simples, podendo-se integrar em relação a $x$ primeiro. Neste caso,

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

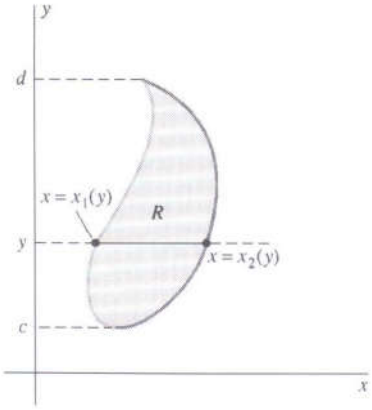


**Fig. 15.3.5** Uma região horizontalmente simples.

Conforme indicado na Fig. 15.3.5, $x_1(y)$ e $x_2(y)$ são as coordenadas $x$ das extremidades deste segmento horizontal, e $c$ e $d$ são as extremidades do intervalo correspondente no eixo $y$.

Se a região $R$ é vertical e horizontalmente simples, tem-se a opção de escolher a ordem de integração que conduza aos cálculos subseqüentes mais simples. Se $R$ não é nem verticalmente nem horizontalmente simples, deve-se então, em primeiro lugar, subdividir $R$ em regiões simples antes de se proceder à integração iterada.

O caso especial $f(x, y) \equiv 1$ na Eq. (1) dá a área

$$A = a(R) = \iint_R 1\, dA = \iint_R dA \tag{4}$$

da região plana $R$. Neste caso, a região sólida $T$ se assemelha a uma "mesa" do deserto (Fig. 15.3.6) — um cilindro sólido com base $R$ de área $A$ e altura 1. O volume de qualquer um desses cilindros — não necessariamente circular — é o produto de sua altura pela área de sua base. Nesse caso, as integrais iteradas nas Eqs. (2) e (3) se reduzem a

$$A = \int_a^b \int_{y_{\text{inf.}}}^{y_{\text{sup.}}} 1\, dy\, dx \quad \text{e} \quad A = \int_c^d \int_{x_{\text{esq.}}}^{x_{\text{dir.}}} 1\, dx\, dy,$$

respectivamente.

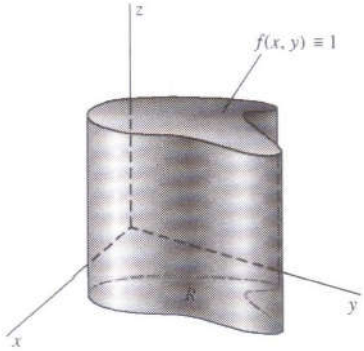


**Fig. 15.3.6** A "mesa".

**EXEMPLO 2** Calcule, por integração dupla, a área $A$ da região $R$ no plano $xy$ delimitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2 - 2x$.

***Solução*** Conforme indicado na Fig. 15.3.7, a reta $y_{\text{sup}} = x$ e a parábola $y_{\text{inf}} = x^2 - 2x$ se interceptam nos pontos (0, 0) e (3, 3). (Estas coordenadas são fáceis de determinar, resolvendo-se a equação $y_{\text{sup}} = y_{\text{inf}}$.) Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \int_{y_{\text{inf.}}}^{y_{\text{sup.}}} 1\, dy\, dx = \int_0^3 \int_{x^2-2x}^{x} 1\, dy\, dx \\ &= \int_0^3 \Big[ y \Big]_{y=x^2-2x}^{x} dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left[ \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3** Ache o volume do sólido $T$ em forma de cunha acima do plano $xy$ e abaixo do plano $z = x$, e no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$. A Fig. 15.3.8 ilustra esta cunha.

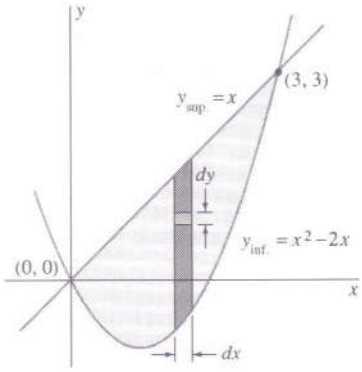


**Fig. 15.3.7** A região $R$ do Exemplo 2.

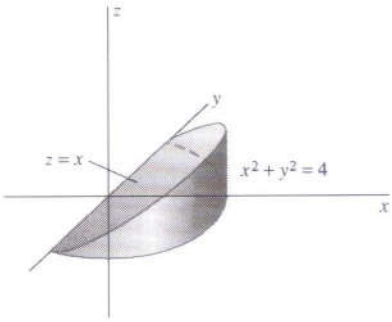


**Fig. 15.3.8** A cunha do Exemplo 3.

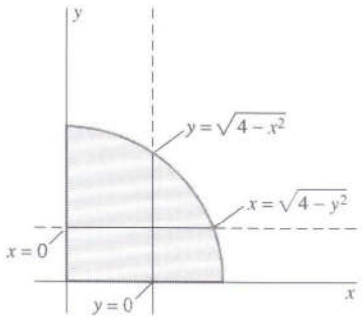


**Fig. 15.3.9** *Metade* da base $R$ da cunha (Exemplo 3).

***Solução*** A região base $R$ é um semicírculo de raio 2, mas, por simetria, pode-se integrar sobre o quarto de círculo $S$ do primeiro quadrante e duplicar o resultado. Um esboço do quarto de círculo (Fig. 15.3.9) ajuda a estabelecer os limites de integração. Poder-se-ia integrar em qualquer ordem, mas a integração primeiro em relação a $x$ dá um cálculo ligeiramente mais simples do volume $V$:

$$V = \iint_S z\,dA = 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx\,dy = 2\int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_0^2 (4 - y^2)\,dy = \left[4y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \tfrac{16}{3}.$$

Como exercício, o leitor deverá integrar na outra ordem e comparar os resultados.

## VOLUME ENTRE DUAS SUPERFÍCIES

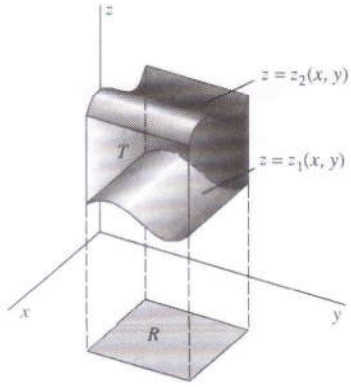


**Fig. 15.3.10** O sólido $T$ tem lados verticais e é delimitado por superfícies acima e abaixo.

Suponha-se agora que a região sólida $T$ esteja acima da região plana $R$, como anteriormente, mas *entre* as superfícies $z = z_1(x, y)$ e $z = z_2(x, y)$, com $z_1(x, y) \leqq z_2(x, y)$ para todo par $(x, y)$ em $R$ (Fig. 15.3.10). Então, obtém-se o volume $V$ de $T$ subtraindo-se o volume abaixo de $z = z_1(x, y)$ do volume abaixo de $z = z_2(x, y)$:

$$V = \iint_R [z_2(x, y) - z_1(x, y)]\,dA. \tag{5}$$

Mais resumidamente,

$$V = \iint_R (z_{\text{sup.}} - z_{\text{inf.}})\,dA$$

onde $z_{\text{sup}} = z_2(x, y)$ representa a superfície do topo e $z_{\text{inf}} = z_1(x, y)$ representa a superfície da base de $T$. É uma generalização natural da fórmula da área da região plana entre as curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ sobre o intervalo $[a, b]$. Além disso, tal como aquela fórmula, a Eq. (5) é válida mesmo se $f_1(x, y)$, ou $f_2(x, y)$, ou ambas, são negativas em parte da região $R$ ou em toda ela.

**EXEMPLO 4** Determine o volume $V$ do sólido $T$ delimitado pelos planos $z = 6$ e $z = 2y$ e pelos cilindros parabólicos $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. A Fig. 15.3.11 ilustra este sólido.

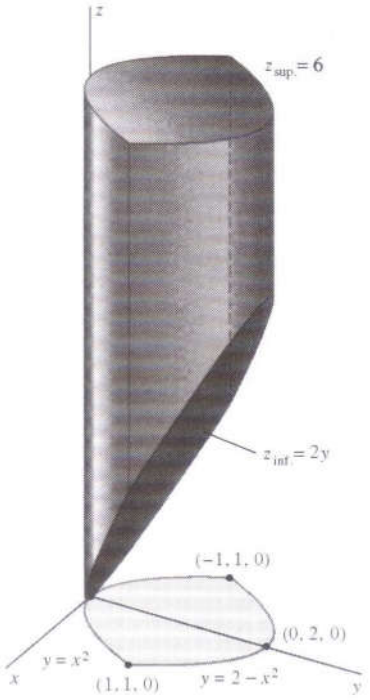


**Fig. 15.3.11** O sólido $T$ do Exemplo 4.

***Solução*** Como os cilindros parabólicos dados são perpendiculares ao plano $xy$, o sólido $T$ tem lados verticais. Assim, pode-se encarar $T$ como situado entre os planos $z_{\text{sup}} = 6$ e $z_{\text{inf}} = 2y$ e acima da região $R$ do plano $xy$ delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. Como se vê na Fig. 15.3.12, estas parábolas se interceptam nos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.

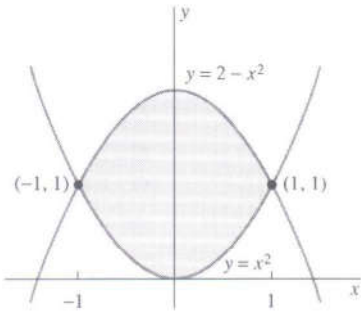


**Fig. 15.3.12** A região $R$ do Exemplo 4.

Integrando-se primeiro em relação a $y$ (pois, do contrário, seriam necessárias duas integrais), obtém-se

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_R (z_{\text{sup.}} - z_{\text{inf.}})\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} (6 - 2y)\, dy\, dx \\
&= 2\int_0^1 \Big[6y - y^2\Big]_{y=x^2}^{2-x^2} dx \qquad \text{(por simetria)} \\
&= 2\int_0^1 ([6(2 - x^2) - (2 - x^2)^2] - [6x^2 - x^4])\, dx \\
&= 2\int_0^1 (8 - 8x^2)\, dx = 16\Big[x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

## 15.3 Problemas

*Nos Problemas 1 a 10, use a integração dupla para achar a área da região do plano xy delimitada pelas curvas dadas.*

**1.** $y = x, y^2 = x$ **2.** $y = x, y = x^4$

**3.** $y = x^2, y = 2x + 3$ (Fig. 15.3.13)

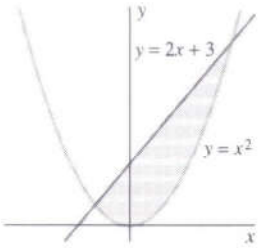


**Fig. 15.3.13** Problema 3.

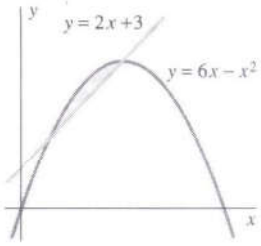


**Fig. 15.3.14** Problema 4.

**4.** $y = 2x + 3, y = 6x - x^2$ (Fig. 15.3.14)
**5.** $y = x^2, x + y = 2, y = 0$
**6.** $y = (x - 1)^2, y = (x + 1)^2, y = 0$
**7.** $y = x^2 + 1, y = 2x^2 - 3$ (Fig. 15.3.15)

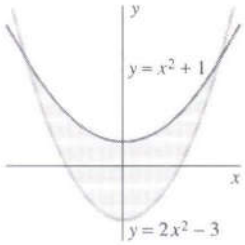


**Fig. 15.3.15** Problema 7.

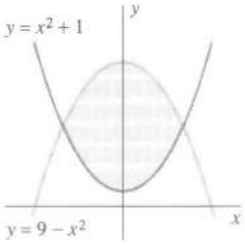


**Fig. 15.3.16** Problema 8.

**8.** $y = x^2 + 1, y = 9 - x^2$ (Fig. 15.3.16)
**9.** $y = x, y = 2x, xy = 2$
**10.** $y = x^2, y = \dfrac{2}{1 + x^2}$

*Nos Problemas 11 a 26, determine o volume do sólido abaixo da superfície $z = f(x, y)$ e acima da região do plano xy delimitada pelas curvas dadas.*

**11.** $z = 1 + x + y;\quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
**12.** $z = 2x + 3y;\quad x = 0, x = 3, y = 0, y = 2$
**13.** $z = y + e^x;\quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$
**14.** $z = 3 + \cos x + \cos y;\quad x = 0, x = \pi, y = 0, y = \pi$ (Fig. 15.3.17)

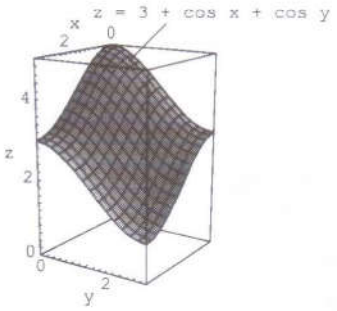


**Fig. 15.3.17** A superfície do Problema 14.

**15.** $z = x + y;\quad x = 0, y = 0, x + y = 1$
**16.** $z = 3x + 2y;\quad x = 0, y = 0, x + 2y = 4$
**17.** $z = 1 + x + y;\quad x = 1, y = 0, y = x^2$
**18.** $z = 2x + y;\quad x = 0, y = 1, x = \sqrt{y}$
**19.** $z = x^2;\quad y = x^2, y = 1$
**20.** $z = y^2;\quad x = y^2, x = 4$
**21.** $z = x^2 + y^2;\quad x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$
**22.** $z = 1 + x^2 + y^2;\quad y = x, y = 2 - x^2$
**23.** $z = 9 - x - y;\quad y = 0, x = 3, y = 2x/3$
**24.** $z = 10 + y - x^2;\quad y = x^2, x = y^2$
**25.** $z = 4x^2 + y^2;\quad x = 0, y = 0, 2x + y = 2$
**26.** $z = 2x + 3y;\quad y = x^2, y = x^3$

**27.** Por integração dupla, calcule o volume do tetraedro no primeiro octante delimitado pelos planos coordenados e pelo plano de equação $x/a + y/b + z/c = 1$ (Fig. 15.3.18). Os números $a$, $b$ e $c$ são constantes positivas.

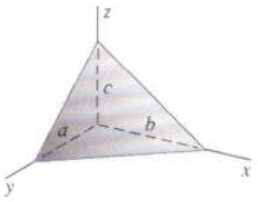


**Fig. 15.3.18** O tetraedro do Problema 27.

**28.** Suponha $h > a > 0$. Mostre que o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, pelo plano $z = 0$, e pelo plano $z = x + h$ é $\pi a^2 h$.

**29.** Calcule o volume da parte do primeiro octante do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ (Fig. 15.3.19). [*Sugestão:* Uma ordem de integração é consideravelmente mais fácil do que a outra.]

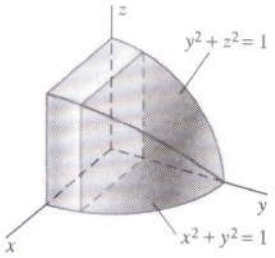


**Fig. 15.3.19** O sólido do Problema 29.

**30.** Determine as áreas das duas regiões delimitadas pela parábola $y = x^2$ e pela curva $y(2x - 7) = -9$, uma hipérbole equilátera transladada (Fig. 15.3.20). [*Sugestão:* $x = -1$ é uma raiz da equação cúbica que deverá ser resolvida.]

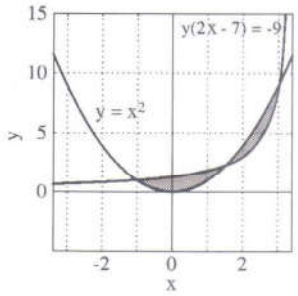


**Fig. 15.3.20** As duas regiões do Problema 30.

*Nos Problemas 31 a 38, o leitor pode consultar o Cap. 9 ou a tábua de integrais, logo após o sumário deste livro, para achar antiderivadas de expressões tais como* $(a^2 - u^2)^{3/2}$.

**31.** Ache o volume de uma esfera de raio $a$ por integração dupla.

**32.** Use a integração dupla para achar a fórmula $V = V(a, b, c)$ para o volume de um elipsóide com semi-eixos $a$, $b$ e $c$.

**33.** Calculando uma integral dupla, determine o volume do sólido delimitado pelo plano $xy$ e pelo parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$ (Fig. 15.3.21).

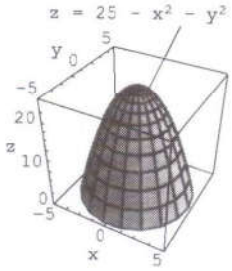


**Fig. 15.3.21** O parabolóide sólido do Problema 33.

**34.** Determine o volume do sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + 2y^2$ e $z = 12 - 2x^2 - y^2$ (Fig. 15.3.22).

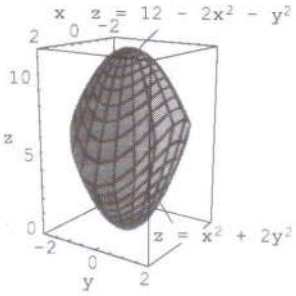


**Fig. 15.3.22** O sólido do Problema 34.

**35.** Ache o volume removido quando se faz um orifício quadrado de lado $R$ diretamente através do centro de um longo cilindro horizontal de raio $R$.

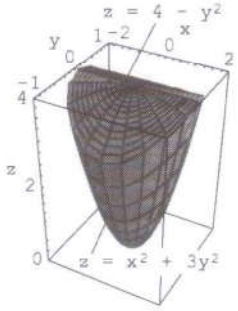


**Fig. 15.3.23** O sólido do Problema 36.

**36.** Determine o volume do sólido delimitado pelas duas superfícies $z = x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - y^2$ (Fig. 15.3.23).

**37.** Determine o volume $V$ do sólido $T$ delimitado pelos cilindros parabólicos $z = x^2$, $z = 2x^2$, $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$.

**38.** Suponha que um orifício quadrado de lado com comprimento 2 seja aberto simetricamente pelo centro de uma esfera de raio 2. Mostre que o volume removido é dado por

$$V = \int_0^1 F(x)\, dx,$$

onde

$$F(x) = 4\sqrt{3 - x^2} + 4(4 - x^2)\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Utilize a regra de Simpson (ou a tecla de integração ou uma subrotina de uma calculadora) para obter uma aproximação desta integral. Seu resultado numérico é consistente com o valor exato

$$V = \tfrac{4}{3}(19\pi + 2\sqrt{2} - 54 \operatorname{arctg} \sqrt{2})?$$