Duplas em polares, Derivadas Parciais e Plano Tangente, Continuidade

(1) Sobre Integrais Duplas em Polares. Antes um longo bate-papo: As somas de Riemann deveriam ser chamadas de somas de Arquimedes, ele empregou coisa muito semelhante há muito tempo atrás. Há uma introdução ao tema no tópico 15.1 do Edwards e Penney. Sugerimos uma leitura rápida deste assunto, não mais do que isso. Também a leitura rápida do tópico 15.2 ajuda a relacionar as somas de Riemann com a maneira de interpretar as integrais duplas que empregamos na lista 1. Para quem gostar de matemática pura sugerimos a leitura das páginas 233 a 252 de Lang, onde a axiomatização está feita corretamente. O Edwards e Penney, também o Stewart, que é muito usado nos arredores, fizeram uma introdução muito breve ao assunto. O Guidorizzi faz a teoria corretamente, mas o Lang tem a vantagem de ser conciso sem deixar de ser preciso. Aqui entre nós, façamos uma fofoca, a axiomatização da integral por Riemann tinha o defeito de entrar em contradição com o teorema fundamental do cálculo para alguns casos de funções. Uma axiomatização nova foi feita por Lebesgue, como comentado na primeira página do tópico 13.1 da edição de 2007, em inglês, do Edwards e Penney, a do Lebesgue é que está certa.

Bem, para nosso curso basta a leitura rápida do tópico 15.1. Isto ajduda a entender a apresentação do Edwards e Penney das integrais duplas em polares, em tópico 15.4, onde ele faz alguma referência a somas de Riemann. Das polares, esta ferramenta útil, é que os senhores serão cobrados na resolução desta lista, neste exercício 1. Dependendo da simetria do problema pode-se efetuar a seguinte mudança de variáveis em integral dupla:

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \;=\; \iint_Q f(r\,\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Empregamos as coordenadas polares. Trocamos x por $r\,\cos\theta$, y por $r\,\mathrm{sen}\theta$ e a função a ser integrada fica em função das polares ... e ainda multiplicamos a função a ser integrada por r, que funciona como um fator de correção, como interpretaremos melhor em listas seguintes (mas uma leitura do tópico 15.4 ajuda a entendê-lo, sem o tal r a igualdade acima não passaria nem por uma análise dimensional). A integral é feita então na região Q do plano hipotético $r\theta$ que, pela troca de coordenadas, corresponde à região R, onde estava sendo feita a integração no plano xy.

Veja um exemplo de aplicação na resolução do exercício 33 do EdPen15.3 que explicamos em resposta ao colega Lucca, onde o volume teria que ser calculado pela integral dupla

$$\iint_R 25 - x^2 - y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\;,$$

onde R é círculo de raio 5, sombra da região tridimensional cujo volume calculamos. No círculo de raio 5, x varia entre -5 e 5 e para cada valor de x fixo nesse intervalo, y varia entre $-\sqrt{25-x^2}$ e $\sqrt{25-x^2}$. Podemos fazer a integral primeiro em x e depois em y, obteríamos

$$\int_{-5}^{5}\left(\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (25-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Essa integral é difícil de fazer, na resposta ao Lucca a fizemos com o soft. Trocando para as polares ela ficará muito mais simples. Em certos casos nem o soft consegue fazer a integral dupla em coordenadas cartesianas, mas se trocamos para polares ele consegue.

Bem, para trocar para polares, precisamos ver que região Q do plano hipotético $r\theta$ corresponde à região R do plano xy, que no caso é um circulo de raio 5. Pensando um pouco, vemos que em tal círculo a coordenada r varia de 0 a 5, enquanto que a coordenada θ varia de 0 até 2π. O círculo R no plano xy corresponde a um retângulo Q no plano hipotético $r\theta$.

$$\iint_R 25 - x^2 - y^2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \;=\; \iint_Q (25 - r^2)\, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Para integrar num retângulo basta integrar, em qualquer ordem, as duas variáveis entre os extremos fixos, pois fixar uma não limita a outra. Trocamos x e y na expressão do integrando por $r\ \cos\theta$ e por $r\ \mathrm{sen}\theta$, ainda multiplicamos o integrando pelo fator de correção r. Temos:

$$\iint_Q (25 - r^2)\, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\int_0^5 25r - r^3 \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \;=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[25r^2/2 - r^4/4 \right]_0^5 \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 625/4 \, \mathrm{d}\theta \;=\; 625\pi/2.$$

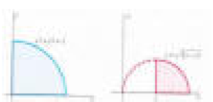
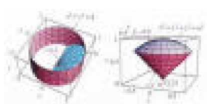
Chega de papo furado e vamos passar uma tarefa para os senhores ficarem afiados nessas integrais duplas por polares:

Primeiro você fará uma versão brasileira do tópico "More General Polar-Coordinate Regions", que começa na página 1022 do tópico tópico 13.4 da edição do Edwards e Penney de 2007 e termina ao final do exemplo 5, na página 1025. Você deve reescrever o texto para o português e fazer as ilustrações no mathematica (espie o item 15.4 da tradução da edição de 1994, para checar a tradução dos termos técnicos).

Também deve dizer a importância do exemplo 5 para a definição de distribuição gaussiana e do que se trata esta distribuição ...e qual a sua relação com o famoso 'teorema central do limite', da Estatística. Procure na net e no help do mathematica a definição e fofocas sobre essa distribuição, já ouviram falar que o Einstein a empregou em um dos seus mais famosos trabalhos? Quem quiser ouvir falar mais dessa distribuição e de estatística num tom não tão acadêmico, suave mas profundo, interdisciplinar e ligado à realidade, há um livro de Leonard Mlodinow, barato, fácil de encontrar em sebos da região, em português. Bem, dado que está tudo fechado, também pode ser baixado. O texto fala das distribuições gaussianas no cap 7.

Finalmente faça dos exercícios da página 1027 os de número 13, 14, 18, 26, 29, 33 e 34, também as ilustrações da página 1027 relacionadas a estes exercícios.

Para ver as ilustrações referidas logo acima, clique nas miniaturas, logo abaixo:

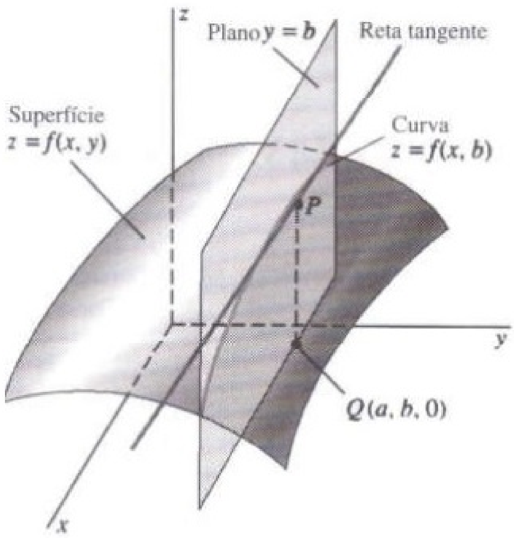
  

(2) Derivas Parciais e Planos Tangentes à Gráficos. Antes um longo bate-papo: Quando começamos a estudar funções de duas variáveis, como $g(x, y)$, para aproveitar aquilo que havíamos estudado sobre funções de uma variável, fixamos uma das duas. Bem, se pudermos colocar, em g, $y = 1$ por exemplo, a função $g(x, 1)$ depende apenas de x e podemos utilizar para ela muita coisa que havíamos estudado no cálculo I. Mais que isso, podemos olhar para $g(x, y)$ como se y fosse um parâmetro, uma constante não determinada, pensar que y está fixo, mas representado por uma letra, não por um número. Então $g(x, y)$ é vista como função apenas da variável x. Podemos derivar está função em x, para isso empregando todas regras de derivação que sabemos desde o cálculo I. Esta derivada é chamada de derivada parcial de g em x, denotada e definida por:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h}$$

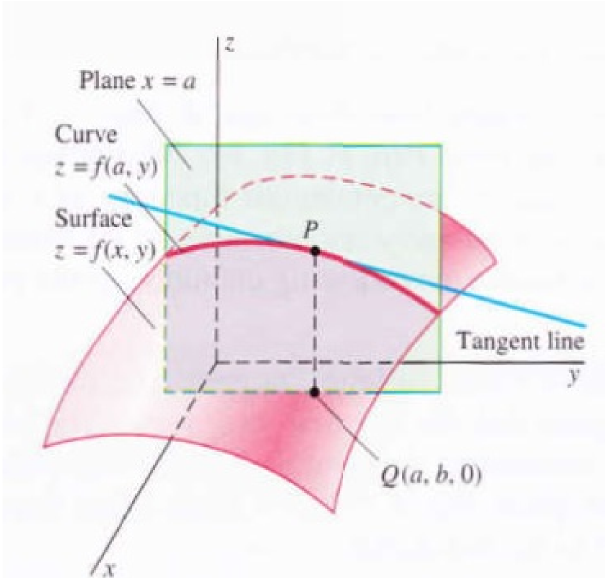
...na definição incrementamos apenas o x deixamos o y fixo. Tal é o mesmo que dizer: derive em x assumindo que y foi fixado. A analogia com a integral parcial que aparece na primeira lista é direta, lá fixávamos uma variável e integrávamos na outra, agora fixamos uma para derivar na outra. No mathematica $\mathrm{D}[g[x, y], x]$ calcula a parcial de g em x (no soft, colchetes, né?).

Do ponto de vista do gráfico de $g(x, y)$, fixar y leva naturalmente a pensarmos em cortar o gráfico pelo plano y fixo, que é ortogonal ao eixo y. Então, no caso da integral, pensávamos na fatia de um certo sólido, ao integrar em x com y fixo, encontrávamos a área da fatia, que dependia do y fixado. Agora pensaremos na curva que obtemos ao cortar o tal gráfico com o plano y fixo, esta curva será o gráfico da função de uma variável, $g(x, y)$ que então é vista apenas como função de x. Uma figura diz mais do que muitas palavras, espie figura logo abaixo, do tópico 14.4, sobre derivadas parciais (na área restrita 14.3 e 14.4 estão juntos):



...filosofe bastante sobre o papo cabeça de fixar uma variável, fazendo com que o gráfico de uma função de duas variáves seja cortado, sendo este corte, ou intersecção, o gráfico da função de uma variável obtida ao fixarmos a outra variável na função que tinha duas variáveis, daí a derivada do cálculo I, na variável que ficou livre, irá determinar a inclinação da reta tangente.

A reta tangente ao gráfico que aparece na figura está presa no plano $y = b$, fixo. Poderíamos ter feito o corte fixando $x = a$, veja o desenho e teríamos uma segunda reta tangente ao gráfico, mas presa no plano $x = a$, com a derivada parcial em y determinando sua inclinação. Aliás, foi isso que o Edwards e Penney fizeram na edição de 2007, veja a figura 12.4.5 que está na página 923 do tópico 12.4.



Então as duas retas tangentes determinariam um plano tangente ao gráfico, o plano que as contém. Assim consideremos a superfície S dada pela equação $z = g(x, y)$, que é o gráfico da função g. Dado um ponto $p = (a, b, g(a, b))$ da superfície S, temos uma estratégia para encontrar a equação do plano T_pS, tangente á superfície S no ponto p. Para encontrar a equação de um plano, se temos seu vetor normal $n = ai + bj + ck$, a equação é $ax + by + cz = d$, para encontrar d basta saber um ponto pelo qual o plano passa. O ponto já temos, para encontrar o vetor normal e saber a equação do plano tangente, podemos fazer o produto vetorial entre os vetores diretores das duas retas tangentes, pois estas retas pertencem ao plano tangente.

Pensemos na primeira, em que fixamos y. Estando a reta presa no plano y, a segunda componente do seu vetor diretor é nula, o tal diretor é da forma $d1 = \alpha i + 0j + \gamma k$. Qualquer vetor proporcional ao vetor diretor também é vetor diretor, assim temos que saber a proporção entre γ e α, mas olhe bem a figura e filosofe, a proporção entre as duas é exatamente a inclinação da reta tangente, $\Delta z/\Delta x$, para pequenas variações, que é dada por $\partial g/\partial x(a, b)$. Assim podemos escolher $\alpha = 1$ e $\gamma = \partial g/\partial x(a, b)$. O vetor diretor da primeira reta tangente será $d1 = 1i + 0j + \partial g/\partial x\ k$. Analogamente o vetor diretor à segunda reta tangente será $d2 = 0i + 1j + \partial g/\partial y\ k$.

Leia com cuidado o tal tópico 14.4 que faz as considerações acima e também o produto vetorial entre $d1$ e $d2$ para ober a fórmula

$$n = \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j - 1k$$

para descrever o vetor normal ao plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$.

Da fórmula acima para o vetor normal ao plano tangente, perceba que as duas derivadas parciais devem anular-se para este plano tangente ser horizontal ao gráfico ... concorda? A tal nulidade das duas derivadas ou a não existência de uma delas correspoderão aos pontos críticos de uma função de duas variáveis, candidatos naturais a máximos e mínimos locais ... note a analogia entre reta tangente horizontal ao gráfico, no cálculo de uma variável e plano tangente horizontal ao gráfico, agora que temos duas variáveis.

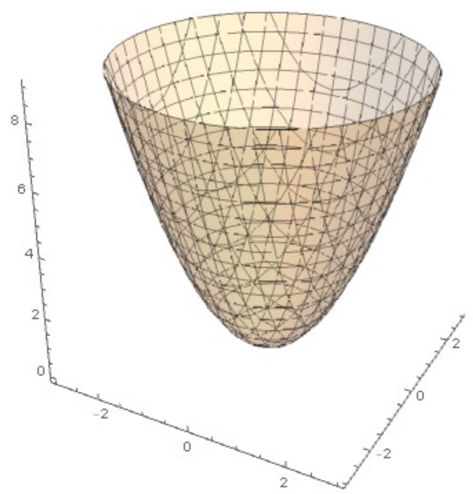
A projeção do vetor normal no plano xy, sua sombra, variando em cada ponto do domínio, é chamada de campo vetorial gradiente da função de duas variáveis, denotado por

$$\nabla g \;=\; \frac{\partial g}{\partial x} i \;+\; \frac{\partial g}{\partial y} j$$

... veremos mais adiante, os pontos interiores do domínio de g em que o gradiente se anula serão os candidatos a máximos e mínimos de g. Este fato é empregado no tópico 14.5 do Edwards e Penney para resolver problemas simples de máximo e mínimo, trabalharemos com este tópico na lista 3. O operador Grad$[g[x, y], \{x, y\}]$ do soft já dá o par de derivadas parciais de g numa lista, $\{\partial g/\partial x, \partial g/\partial x\}$, isto é, o gradiente, haja vista que vetores, para o soft, são listas.

Para dar um pouco de concretude a essa conversa toda, vamos estudar e incrementar o exemplo 4, que aparece na página 20 do 14.4. Considera-se o parabolóide $z = x^2 + y^2$, velho conhecido nosso, superfície que pode ser vista como o gráfico de $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vejamos.

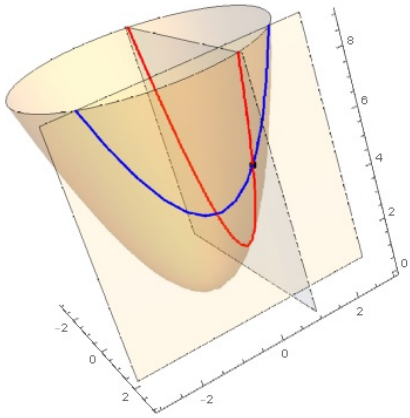
```
a = ContourPlot3D[z == x^2 + y^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, 0, 9},
  ContourStyle → Opacity[0.2], Boxed → False]
```



Note que empregamos o ContourPlot3D em vez do Plot3D, que é dedicado a gráficos. Isto sempre pode ser feito, o gráfico da função g, de duas variáveis, é dado pela equação $z = g(x, y)$ e tal é o mesmo que escrever $h(x, y, z) = g(x, y) - z = 0$, mostrando que o tal gráfico é conjunto de nível da função h, de três variáveis, correspondente a $h = 0$. Bem, a vantagem de empregar o ContourPlot é que, limitando z na declaração dos intervalos das variáveis, não prejudicamos a simetria de revolução, que o Plot3D prejudicaria. Reparem que, se não falamos nada sobre o Mesh, o soft escolhes vários cortes x fixo e y fixo, neste caso.

Para o exemplo 4, que estamos estudando, vide o texto, os cortes $x = 2$ e $y = 1$ são os interessantes, pois neste exercício pretende-se obter o plano tangente ao parabolóide no ponto $(2, 1, 5)$. Vamos fazer o desenho com estes dois cortes apenas.

```
b = Show[ContourPlot3D[z == x^2 + y^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, 0, 9},
   ContourStyle → Opacity[0.2], Boxed → False, MeshFunctions -> {#1 &, #2 &},
   Mesh → {{{2}}, {{1}}}, MeshStyle → {{Thick, Blue}, {Thick, Red}}],
  Graphics3D[{PointSize[Large], Black, Thick, Point[{2, 1, 5}]}],
  ContourPlot3D[{x == 2, y == 1}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, 0, 9}, Mesh → False,
   ContourStyle → {Opacity[0.1], Opacity[0.1]}]]
```



O Show junta execuções. O ContourPlot3D do parabolóide tem o Mesh mostrando as duas parábolas dos cortes $x = 2$ e $y = 1$, o Graphics3D mostra o ponto de encontro desses dois arcos, outro ContourPlot3D mostra os planos cortantes. Vamos juntar as retas tangentes.

```
g[x_, y_] = x^2 + y^2;

Grad[g[x, y], {x, y}];

{d11, d21} = {{1, 0, %[[1]]}, {0, 1, %[[2]]}};

% /. {x → 2, y → 1}
```

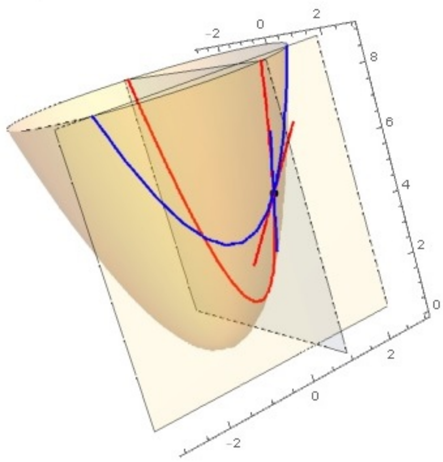
$\{\{1, 0, 4\}, \{0, 1, 2\}\}$

```
{d1, d2} = {(1 / Norm[%[[1]]]) %[[1]], (1 / Norm[%[[2]]]) %[[2]]}
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{17}}, 0, \frac{4}{\sqrt{17}}\right\}, \left\{0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$

```
c = ParametricPlot3D[{{2, 1, 5} + t d1, {2, 1, 5} + t d2}, {t, -2, 2},
   PlotStyle → {{Thick, Blue}, {Thick, Red}}];

Show[b, c]
```



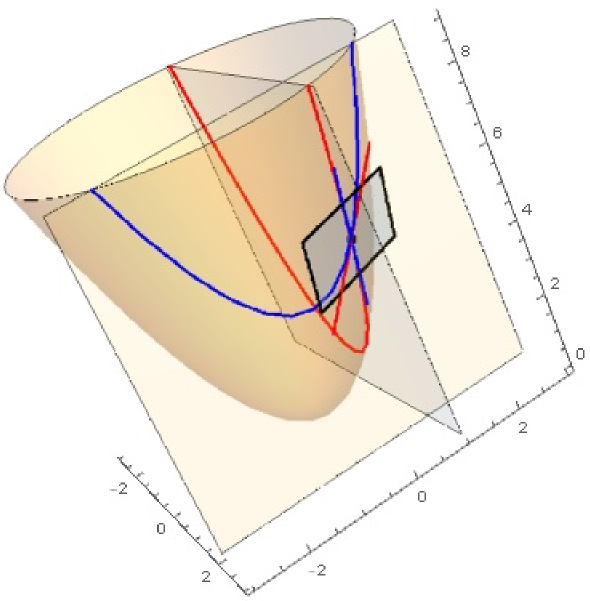
Para desenhar uma reta, podemos empregar sua parametrização, tem a forma $p+td$, onde p é um ponto pelo qual a reta passa e d é o seu vetor diretor. No caso as duas retas passam pelo ponto $p = (2, 1, 5)$. Seus vetores diretores, pelas considerações mais acima, são dados por $d1 = (1, 0, \partial g/\partial x)$ e $d2 = (0, 1, \partial g/\partial y)$. As derivadas parciais de $g(x, y) = x^2 + y^2$ são $\partial g/\partial x = 2x$ e $\partial g/\partial y = 2y$. No ponto em que $x = 2$ e $y = 1$, $\partial g/\partial x = 4$ e $\partial g/\partial y = 2$. Temos $d1 = (1, 0, 4)$ e $d2 = (0, 1, 2)$. Podemos trocá-los por suas versões normalizadas $d1 \to (1/||d1||)\ d1$ e $d2 \to (1/||d2||)\ d1$, que também são diretores, isto ajuda a dimensionar o comprimento do trecho das retas desenhado.

Atentem aos comandos, à sintaxe e os estudem no help do mathematica. Primeiro definimos a função $g(x, y)$, os traços baixos significam que estamos definindo, o ponto-e-vírgula é para o soft não executar, i.e., não escrever nada na linha de baixo (será usado várias vezes). Em seguida caculamos, com o Grad, o gradiente de g, o comando responde com a lista das duas parciais. Em seguida calculamos os diretores das duas retas e depois os normalizamos. O /. é uma versão do comando Replace, que é usado para trocar x por 2, y por 1. O % é aquilo que acabamos de calcular, o par de duplos cochetes pesca componentes de listas. Agora vamos fazer o produto vetorial dos diretores das duas retas e escrever a equação do plano tangente, que usaremos para desenhar um pedaço do tal plano.

```
n = Cross[d1, d2];

d = ContourPlot3D[n.{x, y, z} == n.{2, 1, 5}, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}, {z, 4, 6},
   Mesh → False, ContourStyle → {LightGray, Opacity[0.4]}, BoundaryStyle → {Black, Thick}];

Show[b, c, d]
```



Lindo, né? O Cross faz produtos vetoriais, fizemos dos diretores normalizados mesmo e obtivemos $n = \{a, b, c\}$, um vetor normal pequeno. A equação do plano é $ax + by + cz = d$, para o mathematica, equações dentro de comandos sempre são dadas com dois sinais de igual. Para escrever a equação, empregamos o pontinho, que entre vetores significa produto escalar, o lado esquerdo da equação é o produto escalar do vetor n pelo ponto (identificado com seu vetor de posição) genérico $\{x, y, z\}$. No lado direito, para calcular o d, basta trocar, da expressão no lado esquerdo, o ponto genérico por um ponto em que o plano passa, no caso $p = \{2, 1, 5\}$.

Repetimos a recomendação de que, para cada notebook que produzimos no curso, no caso das figuras acima o 20200401.nb, você estude os comandos e sintaxe no help do soft, que faça variações sobre o tema. Assim usará de forma eficaz este laboratório que tem à disposição e aprenderá muito mais do cálculo II.

Chega de papo furado e vamos passar uma tarefa para os senhores ficarem afiados em derivadas parciais e planos tangentes:

Repita no exemplo 6 da página 925 do tópico 12.4 da edição de 2007 do Edwards e Penney (em inglês), o mesmo tratamento que fizemos logo acima do exemplo 4 do tópico 14.4 do Edwards e Penney em português, incluindo todos elementos gráficos, inclusive as retas tangentes etc..

Na página 926 do tal tópico 12.4, faça as derivadas do exemplo 7, empregando o soft e depois esboce as derivações manualmente, para ver se concorda, faça o mesmo com as derivadas do exemplo 8, na página 927.

Responda ao TRUE/FALSE STUDY GUIDE, nas páginas 927 e 928, fazendo, junto com eventuais argumentos seus, referência, nas respostas, ao trecho do 12.4 que você utilizou para tirar sua conclusão.

Resolva os problemas 38, 39 e 40 da página 928, mas além de resolver, faça ilustrações semelhantes às que fez para o exemplo 6.

Resolva os problemas 42 e 44 da página 929, faça uso do computador para fazer suas contas.

Use o computador para fazer as verificações do 56 e 57, para isso empregue os comandos D e Simplify, faça o mesmo nas questões 59, também da página 929, e 69, da página 930. Por vezes, para verificar que $\alpha = \beta$ no computador, é melhor mostrar que $\alpha - \beta = 0$.

O Simplify, aplicado independentemente em α e β pode levar a duas expressões que aparentemente são diferentes (apesar de serem iguais), mas, nessa situação se aplicamos este comando na diferença $\alpha - \beta$, o comando usualmente leva ao zero, i.e., às vezes o comando não é competente para simplificar ... espie no help como, às vezes, você pode ajudá-lo, alterando opções.

Às vezes não é uma questão de competência, mas uma questão de lógica, você tem que informar algumas coisas para quem está simplificando. Vide abaixo, se você não informa que $a > 0$, quem está simplificando não pode concluir que $\sqrt{a^2} = a$.

Simplify$\left[\sqrt{a^2}\right]$

$\sqrt{a^2}$

Simplify$\left[\sqrt{a^2}, a > 0\right]$

a

(3) Introdução a Limites e Continuidade.

Leia o tópico 12.3 da edição de 2007, com a ajuda do tópico 14.3 da edição de 1994, que está em português, para a tradução de termos técnicos.

Faça uma reprodução brasileira do exemplo 2, que está na página 912, inclusive com ilustrações, faça o mesmo no exemplo 8, que está nas páginas 914 e 915.

Faça os exercícios 47, 49 e 51 da página 918, mas sempre faça o gráfico com o Plot3D, ou substituindo pelo ContourPlot3D como explicamos no bate-papo da questão 2. Também desenhe os conjuntos de nível com o ContourPlot para duas variáveis com opções ContourShading→False e ContourLabels→True. Discuta, em cada caso, se os conjuntos de nível ajudam ou não a entender se os limites não existem ou não.

Faça o problema 54 da página 919, desenhe com o soft a ilustração com um gráfico de $f(x, y)$ que aparece no texto, mas também desenhe os conjuntos de nível de f com o ContourPlot, com as opções sugeridas mais acima.