MT807 - Tópicos em Elementos Finitos
Lista 1, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-2

Seja o seguinte problema de valor de contorno

Problema D: Encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$-u'' + u = x \quad \forall\, x \in \Omega = (0,1), \tag{1}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\mathcal{U}$ é o espaço das funções duas vezes diferenciáveis que satisfazem $u(0) = u(1) = 0$, cuja solução exata é dada por

$$u_e(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}.$$

Um problema variacional associado ao Problema D, consiste em

Problema V: Encontrar $u \in \mathcal{V}$ tal que

$$\int_0^1 [u'v' + uv]\ dx = \int_0^1 xv\ dx \quad \forall\, v \in \mathcal{V}, \tag{2}$$

onde $\mathcal{V}$ é o espaço das funções diferenciáveis que satisfazem $v(0) = v(1) = 0$.

Exercício 1. Seja $\mathcal{V}_h = \operatorname{span}\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{V}$ um espaço de dimensão n, cujas funções satisfazem $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$. A partir do Problema V, podemos apresentar o Método de Galerkin

Problema Vh: Encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$\int_0^1 [u_h'v_h' + u_h v_h]\ dx = \int_0^1 xv_h\ dx \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h, \tag{3}$$

a) Discuta possíveis escolhas para o espaço $\mathcal{V}_h$.

b) Se a solução do Método de Galerkin for escrita como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x), \tag{4}$$

mostre que o Problema Vh pode ser associado à resolução de um sistema linear na forma

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f}, \tag{5}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{w}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, explicitando quais são os elementos a_{ij} da matriz A e f_i do vetor $\mathbf{f}$.

Exercício 2. Seja $\phi_i = x^i(x-1)$. Encontre a solução do Problema Vh para $n = 1, 2$ e 3.

Exercício 3. Seja agora $\phi_i = \sin(i\pi x)$. Utilize a propriedade de que

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = \begin{cases} 0, & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n \neq m \\ 1/2, & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x) = \begin{cases} 0, & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n \neq m \\ 1/2, & n \text{ e } m \text{ inteiros e } n = m \end{cases}$$

e encontre a solução do Problema Vh para $n = 1, 2$ e 3.

Exercício 4. Sabendo que a solução exata do Problema D é dada por

$$u_e(x) = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}.$$

a) Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas nos Exercícios 2 e 3.

b) Construa gráficos comparando a derivada primeira da solução exata com as derivadas primeiras das soluções aproximadas obtidas nos Exercícios 2 e 3.

Exercício 5. Seja $\mathcal{V}_h = \operatorname{span}\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{V}$, com $\phi_i(x) = x^i(x-1)$.

a) Mostre que, neste caso, os coeficientes da matriz A e do vetor $\mathbf{f}$ são dados por

$$a_{ij} = \frac{ij}{i+j-1} - \frac{[(1+i)j + (1+j)i]}{i+j} + \frac{1+(1+i)(1+j)}{i+j+1} - \frac{2}{i+j+2} + \frac{1}{i+j+3}$$

e

$$f_i = \frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2},$$

respectivamente.

b) Escreva um programa que utilize as expressões da letra a) para montar a matriz A e o vetor $\mathbf{f}$, resolva o sistema (5), encontre o vetor de coordenadas $\mathbf{w}$ e determine a solução do Método de Galerkin, equação (4).

c) Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas pelo programa da letra b), para $n = 2, 4$ e 8.

Exercício 6. Seja agora $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$.

a) Determine quais são os valores dos coeficientes da matriz A e do vetor $\mathbf{f}$ e encontre uma expressão analítica para as coordenadas w_i. Escreva a solução (4) para este caso.

b) Mostre que $|w_i| > |w_{i+1}|$ e que $\lim\limits_{i\to\infty} w_i = 0$.

c) Construa gráficos comparando a solução exata com as soluções aproximadas obtidas pelo expressão da letra a), para $n = 2, 4$ e 8.

Exercício 7. Escreva um programa que utilize integração numérica pelo método dos trapézios composto, para montar a matriz A e o vetor $\mathbf{f}$, resolva o sistema (5), encontre o vetor de coordenadas $\mathbf{w}$ e determine a solução do Método de Galerkin, equação (4). O programa deverá ser capaz de usar como funções base tanto $\phi_i(x) = x^i(x-1)$ quanto $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$.

a) Compare as coordenadas obtidas na letra a) da questao 2 com as obtidas pelo programa desenvolvido nesta questão para $n = 6$ e utilizando 5 intervalos para a integração numérica. A matriz A obtida numericamente é diagonal? Os valores da diagonal são os esperados? Quais as possíveis causas da diferença? É possível identificar algum erro apenas analisando as coordenadas?

b) Compare as coordenadas obtidas pelo programa da letra b) da questão 1 com o programa desenvolvido nesta questão para $n = 10$ e utilizando 100 intervalos para a integração numérica. Quais as possíveis causas da diferença?