MS512 - Análise Numérica 1
Lista 9, v1.1

Prof. Maicon Correa

2019-1

Sistemas Não-Lineares.

Observação: Nos exercícios numéricos, utilize como critério de parada o erro absoluto

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon,$$

ou o número máximo de iterações estipulado.

Exercício 1.
Sejam o sistema não-linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 2\,x_2 & = & 1 \\ x_1^2 & + & x_2^2 & = & 16 \end{array}\right. \quad \text{e o ponto inicial} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Apresente o Método de Newton para a resolução do sistema e calcule $\mathbf{x}^2$.

b) Com base na fatoração de Cholesky, avalie se a matriz jacobiana avaliada no ponto inicial $J(\mathbf{x}^0)$ da letra a) é positiva definida.

c) Escreva o método de Jacobi para resolver o sistema linear $J(\mathbf{x}^0)\,\mathbf{d}^0 = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, resultante da aplicação do Método de Newton para calcular $\mathbf{x}^1$, a partir de $\mathbf{x}^0$. É esperada a convergência deste método para este problema? Justifique.

Exercício 2. Considere o sistema não-linear

$$\begin{array}{rcrcl} x_1^2 & + & x_2^2 & = & 2 \\ x_1 x_2 & & & = & 1. \end{array}$$

a) Apresente o Método de Newton para a resolução do sistema e calcule a solução após uma iteração com $\mathbf{x}^0 = [2\ 1]^T$.

b) Os pontos da forma $[\alpha\ \ \alpha]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, poderiam ser usados como valores iniciais convenientes para o método de Newton na resolução deste sistema? Justifique sua resposta.

Exercício 3.

Elabore e implemente um algoritmo para o método de Newton para a solução de um sistema não-linear com n equações e n incógnitas.

Exercício 4.

Utilizando o método de Newton e $\mathbf{x}^0 = [0.1, 0.1, -0.1]^T$, verifique que o sistema não-linear

$$
\begin{aligned}
3x_1 + \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\
(x_1)^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\
e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0
\end{aligned}
$$

possui solução aproximada $[0.5, 0.0, -0.52359877]^T$.

Exercício 5.

No Método de Newton Modificado para a resolução de sistemas de equações não-lineares na forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a seqüência $\{\mathbf{x}^k\}$ é gerada através de $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{d}^k$, onde $\mathbf{d}^k$ é a solução do sistema linear $J(\mathbf{x}^0)\,\mathbf{d}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ e $J(\mathbf{x}^0)$ é a matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, avaliada no ponto inicial $\mathbf{x}^0$. A partir do algoritmo do Exercício 3, elabore um algoritmo para o método de Newton Modificado que utilize a fatoração LU da Jacobiana avaliada em $\mathbf{x}^0$ para a solução de um sistema não-linear com n equações e n incógnitas.

Exercício 6. Resolva o sistema do Exercício 4 utilizando o método de Newton modificado.

Exercício 7. Use o Método de Newton com $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{x}^2$ em cada um dos seguintes sistemas não-lineares.

a)

$$
\begin{cases}
4(x_1)^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}(x_2)^2 = -8 \\
\frac{1}{2}x_1(x_2)^2 + 2x_1 - 5x_2 = -8
\end{cases}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 &= 0 \\
\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)\left(e^{2x_1} - e\right) + 4e(x_2)^2 - 2ex_1 &= 0
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
x_1(1 - x_1) + 4x_2 &= 12 \\
(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 &= 25
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
5(x_1)^2 &= (x_2)^2 \\
x_2 &= 14(\sin x_1 + \cos x_2)
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
3x_1 + \cos(x_2x_3) &= \frac{1}{2} \\
4(x_1)^2 - 625(x_2)^2 + 2x_2 &= 1 \\
e^{-x_1x_2} + 20x_3 &= \frac{3 - 10\pi}{3}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
(x_1)^2 + x_2 - 37 = 0 \\
x_1 - (x_2)^2 - 5 = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{gathered}
10x_1 - 2(x_2)^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0 \\
8(x_2)^2 + 4(x^3)^2 - 9 = 0 \\
8x_2x_3 + 4 = 0
\end{gathered}
$$

Exercício 8. Resolva os sistemas do Exercício 7 utilizando o método de Newton modificado com fatoração LU da matriz Jacobiana em $\mathbf{x}^0$.

Exercício 9. Encontre soluções dos sistemas abaixo utilizando os algoritimos implementados para método de Newton e para o método de Newton modificado, com $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$. Compare os resultados.

a)

$$
\begin{array}{ccccccc}
(x_1)^2 & + & x_2 & & & = & 37 \\
x_1 & - & (x_2)^2 & & & = & 5 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 &= 0 \\
(1 - x_1)^{\frac{1}{4}} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 &= 0 \\
-(x_1)^2 - 0.1(x_2)^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Exercício 10. Considere o sistema não linear

$$
\begin{aligned}
e^{x_1} - 1 = 0 \\
e^{x_2} - 1 = 0
\end{aligned}
$$

cuja solução é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

a) Verifique que a matriz Jacobiana é inversível em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Resolva esse sistema através do método de Newton com $\mathbf{x}^0 = [-10, -10]^T$.