MS512 - Análise Numérica 1
Lista 8, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Métodos Iterativos para Sistemas Lineares.

Obs.: Nos exercícios que seguem, considere que os elementos da diagonal principal da matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são não nulos, ou seja, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Exercício 1. Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

utilizando o método de Jacobi com $x^0 = 0$ e 3 iterações, calculando $\|r^k\|_2$ para cada iteração, onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo após k iterações .

Exercício 2. Implemente um código computacional para resolver um sistema linear pelo método de Jacobi e o utilize para resolver o sistema do exercício anterior.

a) Determine o número de iterações para que $\|r^k\|_2 < 10^{-8}$.

b) Determine o número de iterações para que $\|x^{k+1} - x^k\|_2 < 10^{-8}$.

c) Determine o número de iterações para que $\dfrac{\|x^{k+1} - x^k\|_2}{\|x^{k+1}\|_2} < 10^{-8}$.

Exercício 3. Seja uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível e denote por D a matriz diagonal cuja diagonal principal é a mesma da matriz A.

a) Mostre que o método de Jacobi pode ser escrito como a equação matricial

$$x^{k+1} = D^{-1}\left[(D - A)x^k + b\right].$$

b) Mostre que, neste caso,

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}r^k,$$

onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo após k iterações

Exercício 4. Seja uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível e defina as matrizes D, E e F como segue: $A = D - E - F$, D é diagonal, E é estritamente triangular inferior e F é estritamente triangular superior. Por exemplo, $-E$ é a parte estritamente triangular inferior de A.

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel pode ser escrito como a equação matricial

$$x^{k+1} = D^{-1}\left[b + Ex^{k+1} + Fx^k\right].$$

b) Resolva esta equação para x^{k+1} e mostre que

$$x^{k+1} = (D-E)^{-1}\left[b + Fx^k\right].$$

c) Mostre que, neste caso,

$$x^{k+1} = x^k + (D-E)^{-1}r^k,$$

onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo.

Exercício 5. Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

utilizando o método de Gauss-Seidel com $x^0 = 0$ e 3 iterações, calculando $\|r^k\|_2$ para cada iteração, onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo após k iterações .

Exercício 6. Implemente um código computacional para resolver um sistema linear pelo método de Gauss-Seidel e o utilize para resolver o sistema do exercício anterior.

a) Determine o número de iterações para que $\|r^k\|_2 < 10^{-8}$.

b) Determine o número de iterações para que $\|x^{k+1} - x^k\|_2 < 10^{-8}$.

c) Determine o número de iterações para que $\dfrac{\|x^{k+1} - x^k\|_2}{\|x^{k+1}\|_2} < 10^{-8}$.

Exercício 7. O método de Gauss-Seidel *reverso* consiste na variação do método de Gauss-Seidel em que resolução se inicia pela última equação, consistindo em

para $i = n, \ldots, 1$, faça

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=n}^{i+1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i-1}^{1} a_{ij}x_j^k\right).$$

b) Utilizando a decomposição aditiva $A = D - E - F$, escreva a forma matricial do método de Gauss-Seidel reverso.

c) Resolva o Exercício 5 utilizando o método de Gauss-Seidel reverso.

Exercício 8. O método de Gauss-Seidel *simétrico* consiste no emprego do método de Gauss-Seidel clássico, transformando x^k em $x^{k+\frac{1}{2}}$, seguido pelo emprego do método de Gauss-Seidel reverso, transformando $x^{k+\frac{1}{2}}$ em x^{k+1}.

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel simétrico satisfaz a equação matricial

$$(D-F)x^{k+1} = E(D-E)^{-1}Fx^k + \left[I + E(D-E)^{-1}\right] b.$$

b) Mostre que $I + E(D-E)^{-1} = D(D-E)^{-1}$.

c) Mostre que o Método de Gauss-Seidel simétrico satisfaz

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b,$$

onde $M = (D-E)D^{-1}(D-F)$ e $N = (D-E)D^{-1}E(D-E)^{-1}F = ED^{-1}F$.

d) Mostre que se A é simétrica, então M também é.

e) Mostre que M e N assim determinadas satisfazem $A = M - N$ e que o método de Gauss-Seidel simétrico satisfaz

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k$$

onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo.

Exercício 9. Seja $0 < \omega < 2$ o parâmetro de relaxação.

a) Mostre que o método de Sobre-Relaxação Sucessiva (SOR) pode ser escrito como

para $i = 1, \ldots, n$, faça

$$a_{ii}x_i^{k+1} = a_{ii}x_i^k + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k\right).$$

b) Utilizando a decomposição aditiva $A = D - E - F$, deduza a seguinte expressão para o método SOR

$$Dx^{k+1} = Dx^k + \omega\left[b + Ex^{k+1} + (F-D)x^k\right]$$

c) Mostre que o método SOR satisfaz

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b,$$

onde $M = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)$ e $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$.

d) Mostre que M e N assim determinadas satisfazem $A = M - N$ e que o método SOR satisfaz

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k$$

onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo.

Exercício 10. Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

utilizando o método SOR com $\omega = 1.9$, $x^0 = 0$ e 3 iterações, calculando $\|r^k\|_2$ para cada iteração, onde $r^k = b - Ax^k$ é o resíduo após k iterações .

Exercício 11. Implemente um código computacional para resolver um sistema linear pelo método de SOR e o utilize para resolver o sistema do exercício anterior, com $\omega = 1.5$, $\omega = 1.7$ e $\omega = 1.9$.

a) Determine o número de iterações para que $\|r^k\|_2 < 10^{-8}$.

b) Determine o número de iterações para que $\|x^{k+1} - x^k\|_2 < 10^{-8}$.

c) Determine o número de iterações para que $\dfrac{\|x^{k+1} - x^k\|_2}{\|x^{k+1}\|_2} < 10^{-8}$.

Exercício 12. Analise a complexidade computacional dos códigos implementados nesta lista.

Exercício 13. Os métodos iterativos estudados podem ser escritos em termos da equação de iteração $Mx^{k+1} = Nx^k + b$, onde $A = M - N$ e M é não-singular.

a) Mostre que a solução do sistema $Ax = b$ satisfaz a equação de iteração.

b) Definindo o erro na k-ésima iteração por $e^k = x - x^k$, mostre que

$$e^{k+1} = Ge^k$$

onde $G = M^{-1}N = I - M^{-1}A$ é a matriz de iteração.

c) Determine a matriz de iteração para cada um dos métodos abordados nesta lista.

Exercício 14. (Convergência dos métodos iterativos estacionários) Mostre que a iteração $Mx^{k+1} = Nx^k + b$, onde $A = M - N$ e M é não-singular, converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer vetor inicial x^0 se e somente se o raio espectral da matriz de iteração $G = I - M^{-1}A$ é menor que um.

Exercício 15. Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule a matriz de iteração do método de Jacobi para o sistema.

b) Determine o maior autovalor em módulo da matriz de iteração G calculada na letra a). O que podemos concluir sobre a convergência do método de Jacobi para este sistema?

c) Permute as linhas do sistema, calcule a nova matriz de iteração do método de Jacobi e determine seu maior autovalor, em módulo. O que podemos concluir sobre a convergência do método para este novo sistema?

Exercício 16. (Condição suficiente para convergência) A iteração $Mx^{k+1} = Nx^k + b$, onde $A = M - N$ e M é não-singular, converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer vetor inicial x^0 se, para alguma norma matricial induzida,

$$\|G\| < 1,$$

onde G é a matriz de iteração.

a) Calcule a matriz de iteração G do método de Jacobi para o sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $\|G\|_1$ e estabeleça uma condição suficiente para a convergência do método de Jacobi.

c) Calcule $\|G\|_\infty$ e estabeleça uma condição suficiente para a convergência do método de Jacobi.

d) Calcule agora a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel. Você é capaz de estabelecer uma condição suficiente para a convergência, a partir das normas 1 e infinito?

Exercício 17. (Critério das Linhas) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz o critério

$$0 \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad 1 \leq i \leq n,$$

então A é não-singular e o método de Jacobi para a resolução do sistema $Ax = b$ é convergente.

Exercício 18. (Critério de Sassenfeld: Gauss-Seidel) O critério de Sassenfeld diz que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

onde

$$\beta_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right],$$

então o método de Gauss-Seidel será convergente.

a) Mostre que se o critério das linhas é satisfeito, então o de Sassenfeld também será (ou seja, o critério das linhas também é condição suficiente para a convergência do método de Gauss-Seidel).

Exercício 19. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 30. \end{cases}$$

a) É possível dizer se o Método de Jacobi é convergente para esse sistema, usando o critério das linhas?

b) É possível dizer se o Método de Gauss-Seidel é convergente para esse sistema, usando o critério de Sassenfeld?

Exercício 20.
Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema, com $x^0 = (0, 0)^T$ e 4 iterações.

b) Repita o item a) permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

Exercício 21.
Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} m & 3 & 1 \\ m & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Usando o critério de linhas, verifique quais os valores positivos de m que garantem a convergência do Método de Gauss-Seidel.

b) Repita o exercício utilizando o critério de Sassenfeld.

c) Escolha o menor número inteiro, positivo, para m e realize duas iterações do método de Gauss-Seidel.