MS512 - Análise Numérica 1
Lista 7, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Decomposição em Valores Singulares (SVD).

Exercício 1. Seja a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto$(A) = r$ e a decomposição $A = U\Sigma V^T$ onde $U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes ortogonais e $V = \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem a forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\hat{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

a) Expresse A^T, A^TA e AA^T em termos de U, Σ e V.

b) Mostre que $v_1, \ldots, v_n$ são autovetores de A^TA, $u_1, \ldots, u_m$ são autovetores de AA^T e $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$ são os autovalores não nulos de A^TA e AA^T.

Exercício 2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os autovalores e os autovalores de A^TA.

b) Calcule os autovalores e os autovalores de AA^T.

c) Determine a decomposição SVD de A.

Exercício 3. Determine a decomposição SVD das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$, então

$$\|A\|_2 = \sigma_1.$$

Exercício 5. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$, então

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Exercício 6. A pseudoinversa $A^\dagger$ da matriz A pode ser escrita como

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$$

onde

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Calcule as pseudoinversas das matrizes do Exercício 3.

Exercício 7. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e seja $x \in \mathbb{R}^n$ a solução de norma mínima do problema

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2.$$

Mostre que $x = A^\dagger b$.

Exercício 8. Utilizando SVD (por que não QR?) e a pseudoinversa, encontre a solução de de mínimos quadrados de norma mínima do problema $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$