MS512 - Análise Numérica 1
Lista 6, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Normas de Vetores e Matrizes. Número de condição.

Exercício 1. (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Mostre que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Exercício 2. Prove que a norma-2 (norma Euclideana)

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

é uma norma.

Exercício 3. Prove que a norma-1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

é uma norma.

Exercício 4. Prove que a norma-∞

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

é uma norma.

Exercício 5. Seja agora a norma-p definida como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

O círculo unitário em $\mathbb{R}^2$ com respeito a essa norma é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p = 1\}$. Pensando nos elementos do $\mathbb{R}^2$ como pontos no plano, esboce o círculo unitário para os valores $p = 1, 3/2, 2, 3, 10$ e ∞.

Exercício 6. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é positiva definida, então

$$\|x\|_A = \left(x^T A x\right)^{1/2}$$

define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 7. Seja a norma de Frobenius, definida como

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

a) Mostre que $\|A\|_F$ define uma norma em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Mostre que uma definição equivalente para $\|A\|_F$ pode ser dada por

$$\|A\|_F = \left(\text{trace}(A^T A)\right)^{1/2}$$

onde o operador traço de uma matriz M é definido como

$$\text{trace}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

Exercício 8. Dada uma norma de vetores $\|\cdot\|_v$, mostre que a norma matricial induzida

$$\|A\|_M = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},$$

é, de fato, uma norma matricial.

Exercício 9. Mostre uma norma de vetores e a sua norma matricial induzida satisfazem a desigualdade

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercício 10. Seja a norma-p matricial

$$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

a) Mostre que para o caso $p = 1$, a norma pode ser calculada por

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

b) Mostre que para o caso $p = \infty$, a norma pode ser calculada por

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Exercício 11. Seja a norma espectral

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

a) Calcule $\|I\|_F$ e $\|I\|_2$, onde I é a matriz identidade $n \times n$, e verifique que as normas são diferentes.

b) Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz e mostre que $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

Exercício 12. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular, x é a solução do sistema $Ax = b$ e $\hat{x}$ é a solução do sistema $A\hat{x} = b + \delta b$, então

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

onde $\delta x = \hat{x} - x$ e $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ é o numero de condicionamento (ou número de condição) da matriz A.

Exercício 13. Mostre para qualquer norma matricial induzida $\|I\| = 1$ e $\kappa(A) \geq 1$.

Exercício 14. Sejam as magnificações máxima e mínima, definidas como

$$\text{maxmag}(A) = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

e

$$\text{minmag}(A) = \min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

respectivamente. Mostre que se A é não-singular, então

$$\text{maxmag}(A) = \frac{1}{\text{minmag}(A^{-1})} \quad \text{e} \quad \text{maxmag}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{minmag}(A)}.$$

Exercício 15. Mostre que, para matrizes não-singulares,

$$\kappa(A) = \frac{\text{maxmag}(A)}{\text{minmag}(A)}.$$

Exercício 16. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ e $\kappa_\infty(A)$.

b) Calcule $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$ e $\kappa_1(A)$.

c) Dado $b = [1999 \;\; 1997]^T$, calcule a solução do sistema $Ax = b$.

d) Dado $b + \delta b = [1998.99 \quad 1997.01]^T$, calcule a solução do sistema $A\hat{x} = b + \delta b$ e verifique, para as diferentes normas, se a estimativa do Exercício 12 foi satisfeita.

e) Repita para $b + \delta b = [1999.01 \quad 1997.01]^T$. Perceba que a nova perturbação δb tem mesma norma $\|\delta b\|$ que a da letra d). Como você explica a diferença entre os respectivos δx?

Exercício 17. Seja A uma matriz não-singular e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suas colunas. Mostre que para quaisquer i e j

$$\kappa_p(A) \geq \frac{\|a_i\|_p}{\|a_j\|_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Exercício 18. Determine $\kappa_1(A)$ e $\kappa_\infty(A)$ e utilize a estimativa do Exercício 17 para estabelecer limites inferiores para estes valores, nos seguintes casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix}$.

c) $A = H_n$, a matriz de Hilbert $n \times n$ com $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$, para $n = 2, 3$ e 4.

Exercício 19. Mostre que para qualquer $w \in \mathbb{R}^n$ não nulo vale o seguinte limite inferior:

$$\kappa_1(A) \geq \frac{\|A\|_1 \|A^{-1}w\|_1}{\|w\|_1}.$$

Exercício 20. Na estimativa do Exercício 19, o termo $A^{-1}w$ pode ser calculado pela resolução do problema $Ac = w$. Imaginando que seja conhecida a fatoração LU da matriz A, esse problema pode então ser facilmente resolvido em apenas $2n^2$ operações.

a) Realize a fatoração $A = LU$ das matrizes do Exercício 18.

b) Utilizando a fatoração $A = LU$ e a estimativa do Exercício 19, escolha vetores w e encontre diferentes limites inferiores para $\kappa_1(A)$, para as matrizes do do Exercício 18.

Exercício 21. Mostre que se A é não-singular e

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)}$$

então $A + \delta A$ é não-singular. Este resultado ilustra uma outra importante função do número de condicionamento, fornecendo uma ideia de o quão distante de A está a matriz singular mais próxima.