MS512 - Análise Numérica 1
Lista 5, v1.0

Prof. Maicon Correa

2019-1

Mínimos Quadrados e Sistemas Sobredeterminados

Exercício 1. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n com base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e produto interno

$$\langle u, v \rangle \quad \forall\, u, v \in \mathcal{V}.$$

Um vetor $w \in \mathcal{V}$ pode ser escrito na forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

onde os coeficientes $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Dado um vetor u, não necessariamente pertencente a $\mathcal{V}$, mostre que o vetor $\bar{w} \in \mathcal{V}$ que melhor se aproxima de u, segundo o critério de minimizar o valor do resíduo

$$\langle u - w, u - w \rangle \quad \forall\, w \in \mathcal{V}$$

é dado por

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i v_i$$

onde os coeficientes $\bar{c}_i$ são encontrados pela resolução do sistema normal

$$\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

Exercício 2.

O vetor $\bar{w}$ do exercício anterior é denominado projeção ortogonal de u em $\mathcal{V}$.

a) Se $u \in \mathcal{V}$, qual o valor esperado para $\bar{w}$?

b) Se $\mathcal{V}$ é o espaço dos polinômios cúbicos, e u é um polinômio cúbico, qual o grau de $\bar{w}$?

c) Se $\mathcal{V}$ é o espaço dos polinômios cúbicos, e u é um polinômio linear, qual o grau de $\bar{w}$?

Exercício 3. Utilizando o produto interno do $\mathbb{R}^m$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{k=1}^{m} u_k v_k$$

no sistema normal do exercício 1, temos que o ajuste de mínimos quadrados de uma tabela com m valores por um polinômio de grau até $n \leq m-1$ pode ser dado pela definição de uma base formada por $n+1$ vetores v_j cuja i-ésima componente é dada por $(v_j)_i = (x_i)^j$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 0, \cdots, n$. Por exemplo, seja a tabela:

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

Ela contém $m = 4$ pontos e podemos ajustar um polinômio de grau até $n \leq 3$.

a) Verifique que o sistema normal para o ajuste dos dados da tabela por um polinômio linear pode ser encontrado utilizando:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

b) Verifique que o sistema normal para o ajuste dos dados da tabela por um polinômio quadrático pode ser encontrado utilizando:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. Mostre que os coeficientes do ajuste do polinômio linear $p(x) = a_0 + a_1 x$ a uma tabela de pontos $(x_i; y_i)$, $i = 1, \cdots, m$, podem ser encontrados pela resolução do *sistema normal*:

$$\begin{bmatrix} m & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Exercício 5. Determine o sistema que determina os coeficientes que ajustam o polinômio cúbico

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

à tabela de pontos $(x_i; y_i)$, $i = 1, \cdots, n$.

Exercício 6. Encontre a fatoração de Cholesky das matrizes dos sistemas normais dos dois exercícios anteriores.

Exercício 7. Considere os seguintes dados:

t_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4

a) Plote os pontos da tabela em uma gráfico.

b) Monte um sistema sobredeterminado $Ax = b$ para uma reta formada pelos monômios $\varphi_1(t) = 1$ e $\varphi_2(t) = t$, que passe pelos pontos dados. Esse sistema possui solução? Justifique.

c) Encontre a solução de mínimos quadrados a partir da resolução do sistema normal $A^T Ax = A^T b$ e construa o gráfico desta solução sobre os pontos plotados na letra a).

d) Calcule a norma $\|r\|_2$ do resíduo $r = b - Ax$, onde x é a solução de mínimos quadrados.

Exercício 8. Repita o exercício anterior utilizando:

a) O polinômio de grau ≤ 2 formado pela base composta por: $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ e $\varphi_3(t) = t^2$.

b) A função formada pela base composta por: $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = e^t$ e $\varphi_3(t) = e^{-t}$.

Exercício 9. Plote um gráfico contendo as soluções dos exercícios anteriores e compare as normas os respectivos resíduos encontrados.

Exercício 10. Utilize o processo de Gram-Schmidt (Exercício 17 da lista 4) para construir a fatoração $A = QR$ das matrizes A obtidas nos Exercícios 3 e 4. Em seguida, encontre as soluções de mínimos quadrados dos respectivos exercícios utilizando essa fatoração (não resolver usando o sistema normal).

Exercício 11. Utilize refletores (transformações de Householder) para obter a fatoração $A = QR$ das matrizes A obtidas nos Exercícios 3 e 4. Em seguida, encontre as soluções de mínimos quadrados dos respectivos exercícios utilizando essa fatoração e compare com os resultados do exercício anterior.

Exercício 12. Utilize a fatoração $A = QR$ para encontrar os polinômios lineares que ajustam, pelo método dos mínimos quadrados, os dados das seguintes tabelas:

a)

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	-1	0	7

Exercício 13. Refaça o exercício anterior utilizando polinômios quadráticos.

Exercício 14. Seja a seguinte tabela:

x	$-1,0$	$-0,5$	$0,0$	$0,5$	$1,0$
y	$2,0$	$0,5$	$0,0$	$0,5$	$2,0$

Utilize o método dos mínimos quadrados e a fatoração $A = QR$ para ajustar seus dados utilizando:

a) Um polinômio linear;

b) Um polinômio quadrático;

c) Um polinômio cúbico.

Exercício 15. *(Erro de truncamento)* Seja o erro de truncamento no método dos mínimos quadrados definido como:

- Caso contínuo:
$$D = \|f - p_n\|^2 = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 \, dx$$

- Caso discreto:
$$D = \|f - p_n\|^2 = \sum_{k=0}^{m} [y_k - p_n(x_k)]^2$$

Calcule o erro de truncamento nos ajustes dos exercícios desta lista.

Exercício 16.
Utilizando o método dos mínimos quadrados, aproxime os dados da tabela

x	0	1	2	3	4	5
y	-1	0	3	8	15	24

por um polinômio do tipo $p(x) = a + bx^3$.

Exercício 17. *(Unicidade da fatoração QR)* Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular, então existem matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unicamente determinadas, tais que Q é ortogonal, R é triangular superior com elementos positivos na diagonal principal e $A = QR$.

Exercício 18. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem posto completo, então a matriz R da fatoração QR de A (onde Q é ortogonal e R é triangular superior com elementos positivos na diagonal) é o fator de Cholesky da matriz $A^T A$.